Bulletin de la Classe des sciences

# Construction de quelques surfaces algébriques projectivement canoniques

Lucien Godeaux

**Résumé**
Construction de surfaces algébriques dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

# Construction de quelques surfaces algébriques projectivement canoniques

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

*Résumé.* — Construction de surfaces algébriques dont le système canonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.



Enriques a appelé plusieurs fois l'attention sur l'intérêt qu'il y a de construire des surfaces algébriques dont le système canonique coïncide avec le système des sections hyperplanes (1), surfaces que nous appelons projectivement canoniques pour les distinguer des surfaces canoniques des variétés algébriques à trois dimensions. On ne connaît cependant pas de procédés généraux pour construire de telles surfaces. Enriques a montré que si le système des sections hyperplanes d'une variété V à trois dimensions était son propre adjoint, la section de cette variété par une hyperquadrique était une surface projectivement canonique.

Dans cette note, nous utilisons un autre procédé. Partant d'une surface F dont les courbes canoniques sont découpées par des hyperquadriques et transformée en elle-même par une homographie biaxiale harmonique, nous construisons une image de l'involution déterminée par cette homographie sur la surface F, qui est généralement une surface projectivement canonique.

Nous utiliserons certains résultats sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, notamment la relation qui existe entre les genres arithmétiques d'une surface et de l'image d'une involution appartenant à cette surface (2).

---

(1) *Sulla classificazione delle superficie algebriche* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1e sem. 1914, pp. 206-216, 291-297). ENRIQUES, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche,* raccolte da L. CAMPEDELLI (Padova, 1932, pp. 313 et suiv.). ENRIQUES, *Le superficie algebriche* (Bologna, Zanichelli, 1949, Ch. VIII).

(2) Voir notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Edizioni Cremonese, 1903).

1. Commençons par rappeler une représentation de l'involution déterminée par une homographie biaxiale harmonique.

Soient, dans une espace $S_r$ à $r = a + b + 1$ dimensions, un espace $\sigma_1$ à $a$ dimensions et un espace $\sigma_2$ à $b$ dimensions qui ne se rencontrent pas. Nous désignerons par $y_0, y_1, \ldots, y_a$ les coordonnées d'un point de $\sigma_1$ et par $z_0, z_1, \ldots, z_b$ celles d'un point de $\sigma_2$ de telle sorte que les coordonnées d'un point de $S_r$ soient les $y$, $z$.

Considérons maintenant l'homographie biaxiale harmonique H ayant pour axes $\sigma_1, \sigma_2$ dont les équations sont

$$\rho y_i' = y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, a)$$

$$\rho z_k' = - z_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, b).$$

Les hyperquadriques de $S_r$ transformées en elles-mêmes par H forment deux systèmes. L'un, $| Q_0 |$, est formé d'hyperquadriques ne contenant pas les axes $\sigma_1, \sigma_2$ et a pour equation

$$\varphi_2(y_0, y_1, \ldots, y_2) + \psi_2(z_0, z_1, \ldots, z_b) = 0$$

où $\varphi_2$, $\psi_2$ sont des formes quadratiques de leurs arguments. L'autre système $| Q_1 |$ a pour équation

$$\Sigma \lambda_{ik} y_i z_k = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, a; k = 0, 1, \ldots, b)$$

et a pour base les axes $\sigma_1, \sigma_2$ de l'homographie.

Pour obtenir une image de l'involution déterminée par H dans $S_r$, rapportons projectivement les hyperquadriques $Q_0$ aux hyperplans d'un espace $S_R$ à

$$R = \binom{a+2}{2} + \binom{b+2}{2} - 1$$

dimensions en posant

$$Y_{ik} = y_i y_k, \qquad Z_{ik} = z_i z_k$$

Les équations de cette image s'obtiennent en exprimant que les déterminants

$$| Y_{ik} |, | Z_{ik} | \tag{1}$$

ont la caractéristique un.

Les premières des équations (1) représentent, dans un espace $\Sigma_1$ à $a(a+3)$: 2 dimensions, la variété de Veronese M obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans de $\Sigma_1$ les hyperquadriques de

$\sigma_1$. De même, les secondes des équations (1) représentent dans un espace $\Sigma_2$ à $b\,(b+3):2$ dimensions, la variété de Veronese N obtenue d'une manière analogue en partant de $\sigma_2$.

La variété M est d'ordre $2^a$ et la variété N d'ordre $2^b$. La variété représentant dans $S_R$ l'involution déterminée par H dans $S_r$ est l'intersection de la variété projetant M de $\Sigma_2$ et de la variété projetant N de $\Sigma_1$. Elle est d'ordre $2^{a+b}$ et nous la désignerons par $W_{ab}$. Elle passe $a$ fois par N et $b$ fois par M.

On pourrait aussi chercher à obtenir une représentation de l'involution I engendrée par H en rapportant projectivement les hyperquadriques $Q_1$ aux hyperplans d'un espace à $(a+1)(b+1)-1$ dimensions, en posant

$$X_{ik} = y_i z_k.$$

On obtient ainsi une variété de Segre à $a+b$ dimensions, dont chaque point représente une droite unie de l'homographie H. Cette représentation ne peut nous convenir.

A une hyperquadrique $Q_1$ correspond dans $S_R$ une hyperquadrique $Q'_1$ qui contient les espace $\Sigma_1, \Sigma_2$ et qui touche la variété $W_{ab}$ en chaque point d'intersection. Les équations des hyperquadriques $Q_1$ sont

$$\Sigma\lambda_{ij}\lambda_{kh}Y_{ik}Z_{jh} = 0.$$

2. Considérons dans l'espace $S_r$ une surface F dont les courbes canoniques sont découpées par les hyperquadriques et qui sont transformées en soi par l'homographie H. L'involution I déterminée par H sur F a pour image une surface F′ de $S_R$ dont les courbes canoniques sont en général découpées par les hyperplans et qui est donc projectivement canonique.

Nous utiliserons cette remarque dans l'hypothèse où la surface F est l'intersection complète de $r-2$ hypersurfaces $V_1, V_2, \ldots, V_{r-2}$ d'ordres $m_1, m_2, \ldots, m_{r-2}$, ces nombres étant au moins égaux à deux. Les courbes canoniques de F sont découpées par les hypersurfaces d'ordre

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{r-2} - (r+1)$$

et ce nombre doit être égal à 2. On a

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{r-2} \geqslant 2(r-2)$$

d'où $r \leqslant 7$.

Pour $r = 3$, F est la surface du sixième ordre.

Pour $r = 4$, on a $m_1 + m_2 = 7$, d'où $m_1 = 2, m_2 = 5$ ou $m_1 = 3$, $m_2 = 4$.

Pour $r = 5$, on a $m_1 + m_2 + m_3 = 8$, d'où $m_1 = m_2 = 2, m_3 = 4$ ou $m_1 = 2, m_2 = m_3 = 3$.

Pour $r = 6$, on a $m_1 = m_2 = m_3 = 2$, $m_4 = 3$.

Enfin pour $r = 7$, on a $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = 2$.

Nous examinerons successivement ces différents cas dans l'hypothèse où l'involution I ne possède qu'un nombre fini dc points unis. On supposera $a > 0, b > 0$.

Nous utiliserons la notation suivante: L'expression $F_{mn}(y, z)$ représentera une forme algébrique de degré $m$ en $y_0, y_1, \ldots, y_a$ dont les coefficients sont des formes algébriques en $z_0, z_1, \ldots, ,z_b$.

3. Dans le premier cas, $r = 3$, $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont des droites et F est une surface du sixième ordre dont l'équation est

$$F_{60}(y) + F_{42}(y, z) + F_{24}(y, z) + F_{06}(z) = 0.$$

L'involution I possède 12 points unis, six sur chacune des droites $\sigma_1, \sigma_2$.

Les variétés M, N sont des coniques et la variété $W_{11}$ est du quatrième ordre. A l'équation de F correspond une équation du troisième degré en Y, Z de sorte que dans l'espace $S_5$, l'intersection de la variété $W_{11}$ avec une hypersurface du troisième ordre est une surface projectivement canonique. Cette surface F′ possède 12 points doubles coniques de diramation, six sur chacune des coniques M, N.

Entre le genre arithmétique $p_a = 10$ de F et celui $p'_a$ de F′ on a la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.12,$$

d'où $p'_a = 6$.

Observons que dans un espace à cinq dimensions, l'intersection complète de deux hyperquadriques et d'une hypersurface cubique est une surface projectivement canonique. Actuellement, les deux hyperquadriques sont trois fois spécialisées.

4. Supposons $r = 4$. L'homographie H possède comme axes une droite $\sigma_1$ et un plan $\sigma_2$.

Considérons le premier cas $m_1 = 2, m_2 = 5$.

L'équation de l'hyperquadrique $V_1$ est

$$F_{20}(y) + F_{02}(z) = 0$$

et celle de l'hypersurface $V_2$ est de l'une des formes

$$F_{50}(y) + F_{32}(y, z) + F_{14}(y, z) = 0,$$

$$F_{05}(z) + F_{23}(y, z) + F_{41}(y, z) = 0.$$

Sous la première forme, la variété $V_2$ contient le plan $\sigma_2$ et l'intersection de ce plan avec $V_1$ est une courbe unie de l'involution I. Nous supposerons donc que la variété est représentée par la seconde équation.

Les hyperquadriques de $S_4$ linéairement indépendantes sont au nombre de 15 donc le genre arithmétique de F est $p_a = 14$. D'autre part, l'involution I possède 12 points unis, 10 dans le plan $\sigma_2$ et deux sur la droite $\sigma_1$ (qui appartient à $V_2$). Le genre arithmétique $p_a'$ de F' est donc donné par

$$12(p_a + 1) = 2.12(p_a' + 1) - 3.12,$$

d'où $p_a' = 8$.

La variété $W_{12}$ d'ordre huit, appartient à un espace $S_8$ à huit dimensions.

A l'hyperquadrique $V_1$ correspond dans $S_8$ un hyperplan $V_1'$. En introduisant les coordonnées Y, Z dans l'équation de $V_2$, on obtient une équation

$$z_0\Phi_0 + z_1\Phi_1 + z_2\Phi_2 = 0,$$

où les $\Phi$ sont du second degré en Y, Z. On en déduit, en multipliant par $z_0$,

$$Z_0\Phi_0 + Z_{01}\Phi_1 + Z_{02}\Phi_2 = 0.$$

C'est l'équation d'une hypersurface cubique qui contient F' mais également la variété $W_{11}$ correspondant à la droite $\sigma_1$ et à la droite $z_0 = 0$ du plan $\sigma_2$.

On en conclut que *la section par un hyperplan de la variété commune à* $W_{12}$ *et à une hypersurface cubique en dehors d'une variété* $W_{11}$ *est une surface projectivement canonique.*

Le degré du système canonique de F est 40 et celui du système canonique de F' est égal à 20. La surface F' appartient à un espace à sept dimensions.

5. Supposons maintenant $m_1 = 3, m_2 = 4$.

L'équation de $V_2$ est de la forme

$$F_{40}(y) + F_{22}(y, z) + F_{04}(z) = 0$$

et celle de $V_1$ peut revêtir l'une des formes

$$F_{30}(y) + F_{12}(y, z) = 0,$$

$$F_{03}(z) + F_{21}(y, z) = 0.$$

Dans le premier cas, $V_1$ contient le plan $\sigma_2$ et la section de ce plan par $V_2$ est une courbe unie de l'involution I. C'est donc le second cas qui convient.

L'involution I possède 12 points unis dans le plan $\sigma_2$ et quatre points unis sur la droite $\sigma_1$. Le genre arithmétique de F est $p_a = 15$ et celui $p_a$ de F′ est donné par

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.16,$$

d'où $p'_a = 9$. Au système canonique de F′ correspond donc sur F le système découpé par les hyperquadriques $Q_0$.

Dans l'espace $S_8$, M est une conique et N une surface de Veronese. La variété $W_{12}$ est d'ordre huit. A $V_2$ correspond dans $S_8$ une hyperquadrique. En introduisant dans l'équation de $V_1$ mes coordonnées Y, Z, on obtient une équation

$$z_0\Phi_0 + z_1\Phi_1 + z_2\Phi_2 = 0$$

où les $\Phi$ sont linéaires en Y, Z. En procédant comme plus haut, on obtient

$$Z_{00}\Phi_0 + Z_{01}\Phi_1 + Z_{02}\Phi_2 = 0,$$

équation d'une hyperquadrique qui a en commun avec $W_{12}$ la variété $W_{11}$ relative aux droites $\sigma_1$ et $z_0 = 0$ du plan $\sigma_2$. Le restant de l'intersection est une variété d'ordre douze coupée par l'hyperquadrique homologue de $V_2$ suivant la surface F′.

*Dans un espace à huit dimensions, l'intersection d'une hyperquadrique et de la variété commune à $W_{12}$ et à une hyperquadrique en dehors d'une variété $W_{11}$, est une surface projectivement canonique.*

La surface F′ est d'ordre 24 et possède 16 points de diramation, doubles coniques pour la surface, quatre sur la conique M, douze sur la surface de Veronese N.

6. Passons au cas $r = 5$. L'homographie H peut présenter deux cas: $a = b = 2$ ou $a = 1, b = 3$. Envisageons le premier cas, où $\sigma_1, \sigma_2$ sont des plans. Dans l'espace $S_{11}$, les variétés M, N sont des surfaces de Veronese et $W_{22}$ est d'ordre seize.

Nous commencerons par supposer que les hypersurfaces $V_1, V_2, V_3$ ont les ordres $m_1 = m_2 = 2, m_3 = 4$. A ces hypersurfaces correspondent dans $S_{11}$ deux hyperplans $V'_1, V'_2$ et une hyperquadrique $V'_3$.

Les hyperquadriques de $S_5$ linéairement indépendantes sont au nombre de 21, donc le genre arithmétique de F est $p_a = 19$. L'involution I est dépourvue de points unis, donc le genre arithmétique $p'_a$ de $F'$ est égal à 9 (On suppose que les hypersurfaces $V_1, V_2, V_3$ ne passent pas par $\sigma_1, \sigma_2$). Il en résulte qu'aux courbes canoniques de $F'$ correspondent les sections de F par les hyperquadriques $Q_1$. La surface $F'$ n'est donc pas projectivement canonique.

On en conclut que les courbes canoniques de la surface $F'$, intersection de $W_{22}$, de deux hyperplans et d'une hyperquadrique sont découpées par les hyperquadriques $Q'_1$ passant par $\Sigma_1, \Sigma_2$ et touchant $W_{22}$ en tout point d'intersection.

7. Supposons maintenant que $V_1$ soit une hyperquadrique et $V_2, V_3$ des hypersurfaces cubiques.

Une hypersurface cubique transformée en elle-même par H contient l'un des plans $\sigma_1, \sigma_2$. Pour que l'involution I soit dépourvue de courbe unie, il faut que ces deux hypersurfaces ne contiennent pas le même plan. Les équations de la surface F sont donc

$$F_{20}(y) + F_{02}(z) = 0, \qquad (V_1)$$

$$F_{30}(y) + F_{12}(y, z) = 0, \qquad (V_2)$$

$$F_{03}(z) + F_{21}(y, z) = 0, \qquad (V_3)$$

Dans ces conditions, l'involution I possède six points unis dans $\sigma_1$ et six dans $\sigma_2$. Le genre arithmétique de F est $p_a = 20$ et celui $p'_a$ de $F'$ est donné par

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.12,$$

d'où $p'_a = 11$. Il en résulte qu'aux courbes canoniques de $F'$ correspondent les sections de F par les hyperquadriques $Q_0$. La surface $F'$ est donc projectivement canonique dans un espace à 10 dimensions.

A $V_1$ correspond dans $S_{11}$ un hyperplan et à $V_2, V_3$ par le procédé employé, des hyperquadriques

$$Y_{00}\Phi_0 + Y_{01}\Phi_1 + Y_{02}\Phi_2 = 0,$$

$$Z_{00}\Psi_0 + Z_{01}\Psi_1 + Z_{02}\Psi_2 = 0.$$

La première a en commun avec $W_{22}$ une variété $W_{12}$ correspondant à la droite $y_0 = 0$ du plan $\sigma_1$ et au plan $\sigma_2$. La seconde a en commun avec $W_{22}$ la variété $W_{21}$ relative au plan $\sigma_1$ et à la droite $z_0 = 0$ du plan $\sigma_2$. Enfin, les deux hyperquadriques ont encore en commun avec $W_{22}$ la variété $W_{11}$ relative aux droites $y_0 = 0$ de $\sigma_1$ et $z_0 = 0$ de $\sigma_2$.

*La variété d'un espace à onze dimensions intersections de* $W_{22}$ *et de deux hyperquadriques en dehors des variétés* $W_{21}, W_{12}, W_{11}$ *est coupée par un hyperplan suivant une surface projectivement canonique.*

8. Passons au cas où $\sigma_1$ est une droite et $\sigma_2$ un espace à trois dimensions.

Si F est l'intersection complète de deux hyperquadriques $V_1, V_2$ et d'une hypersurface $V_3$ d'ordre quatre que nous supposerons ne pas contenir $\sigma_1$ et $\sigma_2$, l'involution I possède 16 points unis dans $\sigma_2$. Entre le genre arithmétique $p_a = 19$ de F et celui $p'_a$ de F' on a la relation.

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.16,$$

d'où $p'_a = 11$. Il résulte qu'aux courbes canoniques de F' correspondent les sections de F par les hyperquadriques $Q_0$. F' est donc projectivement canonique dans un espace à dix dimensions.

La variété $W_{13}$ est d'ordre 16 dans un espace à 12 dimensions. Aux hyperquadriques $V_1, V_2$ correspondent deux hyperplans de cet espace et à $V_3$ correspond une hyperquadrique. On voit donc que *L'intersection de la variété* $W_{13}$ *par une hyperquadrique est coupée par un espace à* 10 *dimensions suivant une surface projectivement canonique.*

Le degré du système canonique de F est 64 et celui du système canonique de F' est donc 32.

On peut observer en passant que la section de $W_{13}$ et d'une hyperquadrique par un hyperplan est une variété à trois dimensions dont le système des sections hyperplanes est son propre adjoint.

9. Lorsque F est l'intersection d'une hyperquadrique $V_1$ et de deux hypersurfaces cubiques $V_2, V_3$, il est clair que pour que l'involution I n'ait qu'un nombre fini de points unis, $V_1$ ne peut contenir $\sigma_1, \sigma_2$ et $V_2, V_3$ ne peuvent contenir $\sigma_2$. Ces dernières hypersurfaces ont des équations de la forme

$$F_{03}(z) + F_{21}(y, z) = 0,$$
$$F'_{03}(z) + F'_{21}(y, z) = 0.$$

On en conclut que l'involution I possède 18 points unis dans $\sigma_2$ et deux points unis dans $\sigma_1$. Entre le genre arithmétique $p_a = 20$ de F et celui $p'_a$ de F', on a la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.20,$$

d'où $p'_a = 12$. Il en résulte qu'aux courbes canoniques de F' correspondent sur F les sections de cette surface par les hyperquadriques $Q_0$. Il en résulte aussi que la surface F' est projectivement canonique.

Des équations des variétés $V_2, V_3$ on déduit

$$Z_{00}\Phi_0 + Z_{01}\Phi_1 + Z_{02}\Phi_2 + Z_{03}\Phi_3 = 0,$$
$$Z_{01}\Psi_0 + Z_{11}\Psi_1 + Z_{12}\Psi_2 + Z_{13}\Psi_3 = 0,$$

les $\Phi$ et $\Psi$ étant linéaires en Y, Z.

Ces deux hyperquadriques contiennent l'une la variété $W_{12}$ relative à la droite $\sigma_1$ et au plan $z_0 = 0$ de $\sigma_2$, l'autre la variété $W_{12}$ relative à la droite $\sigma_1$ et au plan $z_1 = 0_0$ de $\sigma_2$. En outre, elles contiennent la variété $W_{11}$ relative à $\sigma_1$ et à la droite $y_0 = z_0 = 0$ de $\sigma_2$. En dehors de ces variétés, ces hyperquadriques coupent $W_{13}$ suivant une variété à trois dimensions d'ordre 36 dont F' est une section hyperplane.

*La section par un hyperplan de la variété commune à* $W_{13}$ *et à deux hyperquadriques en dehors de deux variétés* $W_{12}$ *et d'une variété* $W_{11}$, *est une surface projectivement canonique.*

La surface F' possède 20 points de diramation, doubles coniques pour la surface, deux sur la conique M, 18 sur la variété N.

10. Considérons le cas $r = 6$. La surface F est l'intersection de trois hyperquadriques $V_1, V_2, V_3$ et d'une hypersurface cubique $V_4$.

On peut avoir $a = 2, b = 3$ ou $a = 1$, $b = 4$. Dans chaque cas, nous supposerons que les hyperquadriques $V_1, V_2, V_3$ ne contiennent pas les espaces $\sigma_1, \sigma_2$.

Examinons le premier cas, où $\sigma_1$ est un plan et $\sigma_2$ un espace à trois dimensions. La variété $W_{23}$ est d'ordre 32 et appartient à un espace $S_{15}$ à 15 dimensions.

L'hypersurface cubique contient $\sigma_1$ ou $\sigma_2$. Dans le premier cas, son équation est de la forme

$$F_{03}(z) + F_{21}(y, z) = 0.$$

L'involution I est dépourvue de points unis. Le genre arithmétique $p_a$ de F est égal à 25 et celui $p'_a$ de F' est donné par

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 12$. Il en résulte que les courbes canoniques de F' ont pour homologues sur F les courbes découpées par les hyperquadriques $Q_1$. La surface F' n'est donc pas projectivement canonique.

En introduisant les Y, Z dans l'équation de $V_4$, on obtient

$$z_0\Phi_0 + z_1\Phi_1 + z_2\Phi_2 + z_3\Phi_3 = 0,$$

les $\Phi$ étant linéaires en Y, Z. On en déduit

$$Z_{00}\Phi_{01} + Z_{01}\Phi_1 + Z_{02}\Phi_2 + Z_{03}\Phi_3 = 0,$$

et cette hyperquadrique contient la variété $W_{22}$ relative au plan $\sigma_1$ et au plan $z_0 = 0$ de l'espace $\sigma_2$. Il en résulte qu'en dehors de cette variété, l'intersection de $W_{23}$ et de l'hyperquadrique précédente est une variété W d'ordrc 48. La scction dc W par un espace à 12 dimensions est la surface F'. Les hyperquadriques $Q'_1$ passent par $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ et touchent la variété $W_{23}$ en chaque point d'intersection et par conséquent F'. Les courbes de contact sont les courbes canoniques de cette surface.

11. Nous pouvons supposer que l'hypersurface cubique $V_4$ contient l'espace $\sigma_2$ et a donc une équation de la forme

$$F_{30}(y) + F_{12}(y, z) = 0.$$

Dans ce cas l'involution I possède huit points unis dans $\sigma_2$ et le genre arithmétique $p'_a$ de F' est donné par

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.8,$$

d'où $p'_a = 13$. Aux courbes canoniques de F' correspondent les sections de F par les hyperquadriques $Q_0$ et F' est donc une surface projectivement canonique.

En introduisant les Y, Z dans l'équation de $V_4$ on obtient

$$y_0\Phi_0 + y_1\Phi_1 + y_2\Phi_2 = 0$$

les $\Phi$ étant linéaires en Y, Z. On en déduit

$$Y_{00}\Phi_0 + Y_{01}\Phi_1 + Y_{02}\Phi_2 = 0.$$

A $V_4$ correspond donc dans $S_{15}$ une hyperquadrique qui contient la variété $W_{13}$ relative à la droite $y_0 = 0$ du plan $\sigma_1$ et à $\sigma_2$. En dehors de cette variété, l'hyperquadrique coupe $W_{23}$ suivant une variété W d'ordre 48. La section de W par un espace à 12 dimensions est la surface F'.

*La section par un espace à douze dimensions de l'intersection de la variété* $W_{23}$ *par une hyperquadrique en dehors d'une variété* $W_{13}$ *est une surface projectivement canonique.*

12. Considérons le cas où $\sigma_1$ est une droite et $\sigma_2$ un espace à quatre dimensions. La variété $W_{14}$ est d'ordre 32 et appartient à un espace $S_{17}$ à 17 dimensions.

Pour que l'involution I n'ait qu'un nombre fini de points unis, il faut que les hyperquadriques $V_1, V_2, V_3$ ne passent pas par $\sigma_1, \sigma_2$ et que l'hypersurface cubique $V_4$ ne passe pas par $\sigma_2$. Son équation est donc de la forme

$$F_{03}(z) + F_{21}(y, z) = 0.$$

Dans ces conditions, l'involution I possède 24 points unis dans l'espace $\sigma_2$ et entre le genre arithmétique $p_a = 25$ de F et celui $p'_a$ de F' on a la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.24,$$

d'où $p'_a = 15$. Aux courbes canoniques de F' correspondent les sections de F par les hyperquadriques $Q_0$ et F' est une surface projectivement canonique.

De l'équation de $V_4$ on déduit

$$z_0\Phi_0 + z_1\Phi_1 + z_2\Phi_2 + z_3\Phi_3 + z_4\Phi_4 = 0,$$

où les $\Phi$ sont linéaires en Y, Z et ensuite

$$Z_{00}\Phi_0 + Z_{01}\Phi_1 + Z_{02}\Phi_1 + Z_{03}\Phi_3 + Z_{04}\Phi_4 = 0.$$

Cette hyperquadrique passe par la variété $W_{13}$ relative à $\sigma_1$ et à l'espace $z_0 = 0$ de $\sigma_2$. En dehors de cette variété, l'hyperquadrique coupe $W_{14}$ suivant une variété W d'ordre 48. Un espace à 14 dimensions coupe W suivant la surface F'.

*La section par un espace à* 14 *dimensions de l'intersection de la variété* $W_{14}$ *et d'une hyperquadrique en dehors d'une variété* $W_{13}$ *est une surface projectivement canonique.*

Le degré du système canonique de F est 96 et celui de F' est égal à 48.

13. Il nous reste à examiner le cas $r = 7$. La surface F est l'intersection complète de cinq hyperquadriques ne passant pas par les axes $\sigma_1, \sigma_2$ de H.

Trois cas peuvent se présenter: $a = b = 3$; $a = 2, b = 4$; $a = 1, b = 5$.

Supposons tout d'abord $a = b = 3$. La variété $W_{33}$ est d'ordre 64 et appartient à un espace $S_{19}$ à 19 dimensions.

L'involution I ne possède pas de points unis. Les genres arithmétique $p_a = 31$ de F et $p_a$ de F' sont liés par la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 15$. Aux courbes canoniques de F' correspondent sur F les sections par les hyperquadriques $Q_0$ et F' est projectivement canonique.

On en conclut que *Les sections de la variété* $W_{33}$ *par des espaces à* 14 *dimensions sont des surfaces projectivement canoniques.*

Notons que la section de $W_{33}$ par un espace à 13 dimensions est une variété à trois dimensions dont le système des sections hyperplanes est son propre adjoint.

14. Supposons maintenant $a = 2, b = 4$. La variété $W_{24}$ est d'ordre 64 et appartient à un espace $S_{21}$ à 21 dimensions.

L'involution I est toujours dépourvue de points unis et entre le genre arithmétique $p_a = 31$ de F et celui $p'_a$ de F' on a la même relation que plus haut et $p'_a = 15$. Mais actuellement aux courbes canoniques de F' correspondent les sections de F par les hyperquadriques $Q_1$ et F' n'est plus projectivement canonique.

Aux hyperquadriques $Q_1$ correspondent dans $S_{21}$ des hyperquadriques passant par $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$, touchant $W_{24}$ en chaque point d'intersection.

La section de ces variétés de contact par un espace à 16 dimensions sont les courbes canoniques de la surface F′, qui appartient à cet espace.

15. Reste le cas $a = 1, b = 5$. La variété $W_{15}$ est d'ordre 64 et appartient à un espace $S_{23}$ à 23 dimensions.

L'involution I possède 32 points unis dans l'espace $\sigma_2$ et entre le genre arithmétique $p_a = 31$ de F et celui $p_a'$ de F′ on a la relation

$$12(p_a + 1) = 2.12(p_a' + 1) - 3.32,$$

d'où $p_a' = 19$. Aux courbes canoniques de F′ correspondent les sections de F par les hyperquadriques $Q_0$ et F′ est une surface canonique.

*La section de la variété* $W_{15}$ *par un espace à* 18 *dimensions est une surface projectivement canonique.*

Cette surface possède 32 points doubles coniques qui sont les points de diramation.

16. Nous avons jusqu'à présent supposé que lorsque la surface F appartenant à une hyperquadrique, celle-ci était une hyperquadrique $Q_0$, c'est-à-dire ne passait pas par les axes de l'homographie H. Le cas où F appartient à une ou plusieurs hyperquadriques $Q_1$ peut aussi conduire à des surfaces projectivement canoniques.

Reprenons le cas $r = 5, a = b = 2$. Supposons que la surface F appartienne à une hyperquadrique $Q_1$ et ait par conséquent pour équations

$$F_{20}(y) + F_{02}(z) = 0, F_{11}(y, z) = 0, F_{40}(y) + F_{22}(y, z) + F_{04}(z) = 0.$$

L'involution I possède huit points unis dans chacun des plans $\sigma_1, \sigma_2$. Le genre arithmétique de F est $p_a = 19$ et celui $p_a'$ de F′ est donné par

$$12(p_a + 1) = 2.12(p_a' + 1) - 3.16,$$

d'où $p_a' = 11$.

Aux courbes canoniques de F′ correspondent les courbes découpées sur F par les hyperquadriques $Q_0$. F′ est donc une surface projectivement canonique.

A l'hyperquadrique $Q_1$ passant par F correspond une hyperquadrique $Q_1'$ passant par $\Sigma_1, \Sigma_2$ et touchant la variété $W_{22}$ suivant une variété à quatre dimensions d'ordre 32. D'autre part, la surface F' est située dans un hyperplan de l'espace $S_{11}$ contenant $W_{22}$. On en conclut que *La section de la variété de contact de la variété* $W_{22}$ *avec une hyperquadrique* $Q'_1$ *par l'ensemble d'une hyperquadrique et d'un hyperplan est une surface projectivement canonique d'ordre* 32, *appartenant à un espace à dix dimensions.*

La surface F' possède 16 points doubles coniques de diramation, huit dans chacune des surfaces $\Psi_1$, $\Psi_2$.

17. Retournons au cas $r = 7, a = b = 3$ et supposons que la surface F soit l'intersection de quatre hyperquadriques $Q_0$ et d'une hyperquadrique $Q_1$. L'involution I est dépourvue de points unis et par conséquent le genre arithmétique de F' est $p'_a = 17$.

La surface F' appartient à un espace $S_{15}$ à quinze dimensions et à ses courbes canoniques correspondent les sections de F par les hyperquadriques $Q_1$. On en conclut que le système canonique de F' est formé par les courbes de contact de la surface avec les hyperquadriques $Q'_1$.

18. Si la surface F est l'intersection de trois hyperquadriques $Q_0$ et de deux hyperquadriques $Q_1$, l'involution I possède 16 points unis, huit dans chacun des espaces $\sigma_1, \sigma_2$. Cette surface ayant le genre arithmétique $p_a = 31$, celui $p'_a$ de F' est donné par

$$12(p_a + 1) = 2.12(p'_a + 1) - 3.16,$$

d'où $p'_a = 17$.

Aux courbes canoniques de F' correspondent sur F les courbes découpées par les hyperquadriques $Q_0$ et la surface F' est projectivement canoniques.

Aux deux hyperquadriques $Q_1$ contenant F correspondent dans l'espace $S_{19}$ à 19 dimensions contenant $W_{33}$ deux hyperquadriques $Q'_1$ touchant la variété $W_{33}$. D'autre part la surface F' se trouve dans un espace à 16 dimensions. On en conclut que *La section par un espace à* 16 *dimensions de l'intersection de la variété* $W_{33}$ *et de deux hyperquadriques* $Q'_1$ *est une surface projectivement canonique d'ordre* 64.

La surface F' possède 16 points doubles coniques de diramation, huit dans chacune des variétés $\Psi_1$, $\Psi_2$.

19. Supposons enfin $r = 7$, $a = 2$, $b = 4$, la surface F étant l'intersection de quatre hyperquadriques $Q_0$ et d'une hyperquadrique $Q_1$.

L'involution I possède 16 points unis situés dans l'espace $\sigma_2$ et le genre arithmétique de F′ est donc $p'_a = 17$. A ses courbes canoniques correspondent sur F les courbes découpées par les hyperquadriques $Q_0$. La surface F′ est projectivement canonique.

A l'hyperquadrique $Q_1$ contenant F correspond dans l'espace $S_{20}$ à 20 dimensions contenant $W_{24}$ une hyperquadrique $Q'_1$ touchant la variété précédente en tout point d'intersection, formant une variété à six dimensions d'ordre 64. Il en résulte que *La section par un espace à* 16 *dimensions de la variété de contact d'une hyperquadrique* $Q_1$ *avec la variété* $W_{24}$ *est une surface projectivement canonique d'ordre* 64.

La surface F′ possède 16 points doubles coniques de diramation situés sur la variété $\Psi_2$.

Liège, le 25 septembre 1970.