GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — **Lucien Godeaux**, *Sur la surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois* (deuxième note). *Involutions données d'un nombre fini de coïncidences, appartenant à cette surface.* Note présentée par **M. Hepites**, M.A.R., dans la séance du 28 janvier 1916.

1. — Supposons que la surface F soit transformée en elle-même par une transformation cyclique T_1 de période p, différente de la transformation T [1]. T_1 transforme une courbe H image des couples de points de la courbe A de genre trois dont un point est fixe, en une courbe H′ de genre trois. Le système canonique de F est transformé en lui-même par T_1, donc H étant spéciale, il en est de même de H′. Lorsque H varie dans le système Σ, de degré 1 et d'indice 2, existant sur F, H′ varie dan un système Σ', de même degré et de même indice.

Csoisissons, pour la courbe A, une courbe plane d'ordre quathe. Une courbe H, de Σ, est le lieu des points de F imrages des couples de points de A ayant un point fixe P. Les couples de points de A dont les images sont les points de la courbe H′ corespondante à H, sont alignés sur un point P′ du plan de A, puisque H′ est spéciale. On voit donc qu'à chaque point P de A correspond un point P, du plan de A. Ce point est évidemment variable ; il décrit une certaine courbe ayant des points communs avec A. Remarquons que T transforme les courbes H de Σ en les courbes H_1 d'un système Σ_1, une courbe H augmentée de sa corespondante H_1 donnant une courbe canonique. Il existe par suite quelques courbes H′ qui appartiennent, soit à Σ, soit à Σ_1.

Supposons que ce soit le premier cas qui se présente.

---

(1) Nous conservons les notations de notre première note sur le même sujet, parue le mois dernier dans le *Bulletin de l'Académie Roumaine* IV, p. 271.

Alors, les courbes H' sont des unisécantes des courbes H. Si toutes les courbes H' n'appartiennent pas à Σ, les couples de courbes H issues des points d'une courbe H' n'appartenant pas à Σ, déterminent, dans Σ, une involution γ_2', de genre trois, ce qui est absurde. On en conclut que T_1 transforme Σ en lui-même, c'est-à-dire qu'il existe une transformation τ, birationnelle, de A en elle-même. Remarquons que la période de τ est égale à la période p de T_1.

Un raisonnement analogue conduit, dans le second cas, à la même conclusion. Par suite :

Si la surface F possède une transformation birationnelle cyclique en elle-même, la courbe A possède une transformation birationnelle de même période en elle-même.

Observation. — On conclut également de ce qui précède que :

La surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois ne possède aucune transformation birationnelle non périodique en elle-même.

2\. — Soient P_{11}, P_{12}, deux points quelconques d'une courbe A de genre trois transformée en elle-même par une transformation τ birationnelle de période p. Désignons par P_{21}, P_{22} leurs corespondants par τ, par P'_{11}, P'_{12}; P'_{21}, P'_{22} respectivement les couples de points qui, avec respectivement P_{11}, P_{12}; P_{21}, P_{22}, forment des groupes canoniques de A. Soient enfin P_1, P_2, P'_1, P'_2 les points de F images respectivement des couples P_{11}, P_{12}; P_{21}, P_{22}; P'_{11}, P'_{12}; P'_{21}, P'_{22}.

Les transformations T_1, qui fait passer de P_1 à P_2; T, qui fait passer de P_1 à P'_1, sont permutables, car $T_1 T$ fait passer de P_1 à P'_2 et $T T_1$ également. La transformation $T T_1$ a par suite la même période p que T_1.

Une transformation birationnelle cyclique de F en elle-même est permutable avec la transformation T.

3. — Considérons, sur F, une involution I_n, d'ordre n, douée d'un nombre fini de points de coïncidence. D'après ce que nous avons démontré, elle est cyclique, ou engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface F en elle-même (*Rendiconti R. Accad. Lincei*, 1914). Nous distinguerons deux cas:

a. I_n n'est pas composée avec l'involution engendrée par T. Alors, la courbe A dont F représente les couples de points possède une involution d'ordre *n*, engendrée par un groupe de transformations birationnelles;

b. I_n est transformée en elle-même par T. Alors, la courbe A possède une involution d'ordre $\frac{n}{2}$ engendrée par des transformations birationnelles.

Si l'on remarque qu'à une transformation birationnelle involutive de A en elle-même corespond sur F une involution ayant une courbe de coïncidence, on voit que:

Les involutions données d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface représentant les couples de points d'une courbe $\varphi(x,y)=0$ *de genre trois, sont d'ordre* 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18; *à savoir*[1]:

a. *Une involution d'ordre deux pour* $\varphi(x,y)$ *quelconque.*

b. *Une involution d'ordre trois pour.*

$$\varphi(x,y) \equiv x^3 y + f_4(y); \qquad (1)$$

c. *Une involution d'ordre trois pour*

$$\varphi(x,y) \equiv a x^4 + b x^2 y + c x y^3 + d x + e y^2; \qquad (2)$$

d. *Une involution d'ordre six pour* $\varphi(x,y)$ *ayant la forme* (1);

e. *Une involution d'ordre six pour* $\varphi(x,y)$ *ayant la forme* (2);

---

(1) Les involutions d'une courbe de genre trois, engendrées par un groupe de transformations birationnelles, ont toutes été déterminées par **S. Cantor** et **M. Wiman.**

f. *Une involution d'ordre 7 pour*

$$\varphi(x,y) \equiv xy^3 + y + x^3; \tag{3}$$

g. *Une involution d'ordre 9 pour*

$$\varphi(x,y) \equiv x^4 + xy^3 + y \tag{4}$$

h. *Une involution d'ordre 14 pour* $\varphi(x,y)$ *ayant la forme* (3);

i. *Une involution d'ordre 18 pour* $\varphi(x,y)$ *ayant la forme;* (4).

Front Belge, 1-er janvier 1916.