Bulletin de la Classe des sciences

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (troisième note)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude des systèmes linéaires partiels appartenant à une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de seconde espèce, sur une surface algébrique, contenus dans un même système linéaire.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique

(troisième note),

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude des systèmes linéaires partiels appartenant à une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de seconde espèce, sur une surface algébrique, contenus dans un même système linéaire.

Continuant nos recherches sur les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique (1) nous étudions ici le cas où les points unis ont la même structure définie de la manière suivante:

Prenons comme modèle projectif de la surface F contenant l'involution une surface sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie de période première $p = 2\nu + 1$, possédant p axes ponctuels dont un seul rencontre la surface, aux points unis de l'involution. Dans le plan tangent en un de ces points A à la surface F, l'homographie H détermine une homographie qui peut être représentée par

$$x_0':x_1':x_2' = x_0:\varepsilon x_1 :\varepsilon^\alpha x_2,$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité et α un entier compris entre 1 et $p-1$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant p-1)$. Le point uni A est donné par $x_1 = x_2 = 0$. Si $\alpha = 1$, le point A est uni de première espèce. Si $\alpha > 1$, le point est uni de seconde espèce. La connaissance de α suffit pour déduire la structure du point uni et celle du point de diramation qui lui correspond sur une surface image de l'involution, comme

(1) Les deux premières notes ont paru dans le Bulletin de l'Académie, 1970, pp. 1192-1204, 1326-1337.

cela résulte de nos recherches antérieures sur cet objet (1). Nous dirons que le point uni est d'espèce $(1, \alpha)$. Dans cette note, nous supposerons que tous les points unis de l'involution sont de l'espèce (1, 2) (2).

1. Soit F une surface algébrique appartenant à un espace S_r à r dimensions, transformée en soi par une homographie H, de période p, $p = 2\nu + 1$ étant un nombre premier impair, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$. Nous supposerons que seul l'axe σ_0 rencontre la surface F, en un nombre fini de points. Sur la surface F, H détermine une involution cyclique I d'ordre p, présentant un nombre fini de points unis, les points de rencontre de σ_0 avec la surface. Nous ferons l'hypothèse que tous ces points unis sont de l'espèce (1, 2).

Désignons par $| C |$ le système des sections hyperplanes de F, système que nous supposerons régulier et complet. Soient ξ_k les hyperplans de S_r passant par les axes de l'homographie H sauf par σ_k, et $| C_k |$ le système des courbes que ces hyperplans découpent sur F. Soient encore $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$ les dimensions des axes de l'homographie H, c'est-à-dire celles des systèmes $| C_0 |, | C_1 |, \ldots, | C_{p-1} |$.

Le système $| C_0 |$ est dépourvu de points-base. Rapportons projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions. Il correspond à la surface F une surface Φ, image de l'involution I. Nous désignerons respectivement par $| \Gamma_0 |, | \Gamma_1 |, \ldots, | \Gamma_{p-1} |$ les systèmes linéaires qui correspondent sur Φ aux systèmes $| C_0 |, | C_1 |, \ldots, | C_{p-1} |$.

Si n est l'ordre de la surface Φ et π le genre de ses sections hyperplanes Γ_{01} la surface F est d'ordre pn et les courbes C ont le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Nous ferons les mêmes hypothèses que nous avons faites dans les deux premières notes et qui ne restreignent pas la généralité. Nous supposerons $\nu > 1$, le cas $\nu = 1, p = 3$ étant un cas particulier de celui étudié dans notre seconde note.

2. Soit A un point uni de l'involution I, que nous supposons être de seconde espèce et dont par conséquent le plan tangent à F en ce point s'appuie en un point sur deux des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie H.

(1) Voir notre ouvrage sur la *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Édit. Cremonese, 1963).

(2) Voir *Théorie des involutions...* (loc. cit.), p. 57 et suiv.

Dans le plan tangent à F en A l'homographie H détermine une homographie non homologique dont les équations peuvent s'écrire sous la forme

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^2 x_2,$$

ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité et le point A ayant pour coordonnées $x_1 = x_2 = 0$.

Les tangentes $t_1(x_2 = 0)$ et $t_2(x_1 = 0)$ s'appuient chacune sur un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$.

Nous supposerons que tous les points unis de l'involution I sont de la même nature et nous rappellerons les propriétés suivantes (1):

Les courbes C_0 passant par un point uni A y acquièrent un point multiple d'ordre $\nu + 1$ ($p = 2\nu + 1$). Nous les désignerons par C'_0. Les tangentes en A aux courbes C'_0 sont ν tangentes coïncidant avec t_1 et une tangente avec t_2. Le point A_{11} infiniment voisin de A sut t_1 est multiple d'ordre ν pour les courbes C'_0 et d'autre part uni de première espèce pour l'involution I. Les courbes C_0 passent simplement par ν points $A_{21}, A_{22}, \dots, A_{2\nu}$ infiniment voisins successifs de A, le premier étant sur t_2 et le dernier étant uni de première espèce pour l'involution.

Au point A correspond sur Φ un point de diramation A' qui est multiple d'ordre $\nu + 1$ pour la surface et équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une droite γ_1 et à une courbe rationnelle γ_ν d'ordre ν se rencontrent en un point. Les cônes tangents à F en A se décompose en un plan et en un cône rationnel d'ordre ν dont une génératrice et une seule appartient au plan. Nous désignerons ce cône tangent par $(\gamma_1) + (\gamma_\nu)$.

Les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de t_1, t_2 acquièrent en A la multiplicité $\nu + 2$. Elle sont $\nu - 1$ tangentes confondues en t_1 et passent $\nu - 1$ fois par le point A_{11} et trois tangentes confondues avec t_2. Ces courbes passent par A_{21} et par une suite de points infiniment voisins successifs dont le dernier est simple et uni de première espèce. Nous désignerons ces courbes par C''_0.

Les courbes C''_0 assujetties à toucher en A une droite distincte de t_1, t_2 acquièrent en ce point la multiplicité $\nu + 3$, et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite de systèmes linéaires $|C'_0|, |C''_0|, \dots, |C^{\nu}_0|, |C^{\nu+1}|$ dont les multiplicités en A vont en croissant d'une unité

(1) Voir *Théorie des involutions*... (loc. cit.) p. 57 et suiv.

et dont les tangentes sont confondues avec t_1 et t_2 sauf le dernier qui a en A la multiplicité p avec des tangentes variables. Le nombre des points d'intersection de deux courbes C_0^k absorbés en A est évidemment multiple de p.

Aux courbes C_0'' correspondent sur Φ des courbes Γ_0'' sections de la surface par les hyperplans passant par la droite commune aux cônes $(\gamma_1),(\gamma_2)$. Aux courbes C_0''' correspondent sur Φ les courbes Γ_0''' découpées par les hyperplans touchant le cône (γ_ν) le long de la droite (γ_1, γ_2). Et ainsi de suite. Aux courbes C_0^ν correspondent les courbes découpées sur Φ par les hyperplans ayant un contact d'ordre $\nu - 1$ avec (γ_ν) le long de la droite (γ_1, γ_2).

Les systèmes $|\Gamma_0'|, |\Gamma_0''|, \ldots, |\Gamma_0^k|, \ldots, |\Gamma_0^\nu|, |\Gamma_0^{\nu+1}|$ ont respectivement les degrés $n - (\nu + 1), n - \nu, \ldots, n - (\nu + k), \ldots, n - 2\nu. n - p$.

3. M. B. Segre a montré que la structure des points unis d'une involution cyclique appartenant à une surface algébrique et celle des points de diramation correspondant sur l'image de l'involution, ne dépendant pas de la classe à laquelle la surface appartenait (¹). Ce résultat était d'ailleurs prévisible, car dans nos recherches sur la structure des points en question, nous ne nous sommes jamais servi des caractères de la surface, sauf dans les applications.

Cela étant, plaçons-nous dans un plan et prenons pour équations de l'homographie H celles qui ont été utilisées plus haut pour définir la nature des points unis.

Au système $|C_0|$ correspond le système d'équation

$$\lambda_0 x_0^p + \lambda_1 x_0^\nu x_1 x_2^\nu + \lambda_2 x_0^{\nu-1} x_1^3 x_2^{\nu-1} + \cdots = 0$$

et aux systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ correspondent des systèmes qui peuvent se ranger en deux groupes.

Le premier groupe est formé des systèmes d'équations

$$\lambda_0 x_0^{p-k} x_2^k + \cdots = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

équation qui se reproduit multipliée ε^{2k} lorsque l'on effectue H. Ces courbes ont la multiplicité k en A et comme tangente unique $x_2 = 0$.

Le second groupe est formé des systèmes d'équation

$$\lambda_0 x_0^{p-k-1} x_1 x_2^k + \cdots = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$$

(¹) B. Segre, *Some proprieties of differentiable varieties and transformations* (Berlin Springer, 1957).

équation qui est reproduite multipliée par ε^{2k+1} lorsque l'on effectue H. Ces courbes passent $k+1$ fois par A et y ont deux tangentes, la tangente $x_2 = 0$ comptée k fois et la tangente $x_1 = 0$ simple.

Observons que les courbes qui correspondent aux courbes C'_0 ont pour équation

$$\lambda_1 x_6^{\nu} x_1 x_2^{\nu} + \lambda_2 x_0^{\nu-1} x_1^3 x_2^{\nu-1} + \cdots = 0,$$

de sorte que la tangente $x_2 = 0$ a pour homologue la tangente t_1 alors que la tangente $x_1 = 0$ a pour homologue t_2.

Retournons maintenant à la surface F.

Les courbes C_{2k} ont en A la multiplicité k, les k tangentes étant confondues avec la droite t_1. Il en résulte que ces courbes passent k fois par le point A_{11}.

Les courbes C_{2k+1} ont en A la multiplicité $k+1$, k tangentes étant confondues avec t_1 et une avec t_2.

Observons que les courbes $C_{2(\nu-k)+1}$ ont la multiplicité $\nu - k + 1$ en A, avec $\nu - k$ tangentes confondues avec t_1 et une avec t_2. Par conséquent les courbes C_{2k} ajoutées aux courbes $C_{2(\nu-k)+1}$ ont la multiplicité $\nu + 1$ en A avec ν tangentes confondues en t_1 et une en t_2. Ces courbes font donc partie du système $| C_0 + C'_0 |$ et les courbes C_{2k+1} passent par les points $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2\nu}$.

4. Considérons le système $| C_i |$ et supposons qu'il ait la multiplicité k en un point uni A, les k tangentes étant confondues avec t_2.

Les courbes C_i passent k fois par le point A et par le point A_{11} donc le point A diminue de $2k^2$ unités le degré du système $| C_i |$.

D'autre part, le point A diminue de $k(k-1)$ unités le genre des courbes C_i. Dans la correspondance $(1, p)$ entre une courbe Γ_i et la courbe C_i homologue, il y a $2k$ points de diramation en A'.

Supposons maintenant que les courbes C_i aient en un point uni A la multiplicité $k+1$, k tangentes étant confondues avec t_1 et une avec t_2.

Comme les courbes C_i ont la multiplicité $k+1$ en A, la multiplicité k en A_{11} et passent par les points $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2\nu}$ le point A abaisse le degré du système $| C_i |$ de $2k^2 + 2k + \nu + 1$ unités.

Le genre des courbes C_i est abaissé de k^2 unités. Dans la correspondance $(1, p)$ entre une courbe Γ_i et la courbe C_i homologue, il y a $k+1$ points de diramation en A'.

5. Supposons d'une manière précise que les courbes C_i passent $k+1$ fois par α_{2k+1} points unis $(k=0, 1, \ldots, \nu-1)$ et k fois par α_{2k} points unis $(k=1, 2, \ldots, \nu)$.

Nous allons rechercher la dimension du système $|C_i|$ c'est-à-dire du système $|\Gamma_i|$ qui lui correspond sur Φ.

D'après ce qu'on vient de voir, le degré de $|C_i|$ est diminué de $2k^2+2k+\nu+1$ unités par les α_{2k+1} points du prcmicr groupe et de $2k^2$ unités par les α_{2k} points unis du second groupe. On a donc pour le degré de $|C_i|$ la valeur

$$pn-\sum_{0}^{\nu-1}(2k^2+2k+\nu+1)\alpha_{2k+1}-2\sum_{1}^{\nu}k^2\alpha_{2k}.$$

Il en résulte que le degré de $|\Gamma_i|$ est

$$n_i=n-\frac{1}{p}\sum_{0}^{\nu-1}(2k^2+2k+\nu-1)\alpha_{2k+1}-\frac{2}{p}\sum_{1}^{\nu}k^2\alpha_{2k}.$$

Le genre des courbes C_i est

$$p(\pi-1)+1-\sum_{0}^{\nu-1}k^2\alpha_{2k+1}-\sum_{1}^{\nu}k(k-1)\alpha_{2k}.$$

Entre une courbe Γ_i et la courbe C_i homologue, nous avons une correspondance $(1,p)$ possédant

$$\sum_{0}^{\nu-1}(k+1)\alpha_{2k+1}+\sum_{1}^{\nu}k\alpha_{2k}$$

points de diramation. Le genre π_i des courbes Γ_i est donc donné par

$$2p(\pi_i-1)+(p-1)\Big[\sum_{0}^{\nu-1}(k+1)\alpha_{2k+1}+\sum_{1}^{\nu}k\alpha_{2k}\Big]$$
$$=2p(\pi-1)-2\Big[\sum_{0}^{\nu-1}k^2\alpha_{2k+1}+\sum_{1}^{\nu}k(k-1)\alpha_{2k}\Big],$$

c'est-à-dire par

$$2p(\pi_i-1)=2p(\pi-1)-2\sum_{0}^{\nu-1}[k^2+(k+1)]\alpha_{2k+1}$$
$$-2\sum_{1}^{\nu}k(k+\nu-1)\alpha_{2k}.$$

On a donc

$$\pi_i = \pi - \frac{1}{p}\sum_0^{v-1}[k^2 + (k+1)v]\alpha_{2k+1} - \frac{1}{p}\sum_1^{v} k(k+v-1)\alpha_{2k}.$$

D'après le théorème de Riemann-Roch, la dimension r_i de $|\,\Gamma_i\,|$ satisfait à l'inégalité

$$r_i \geqslant p'_a + n - \pi + 1 - \frac{1}{p}\sum_0^{v-1}[k^2 - k(v-2) + 1]\alpha_{2k+1}$$

$$- \frac{1}{p}\sum_1^{v}[k^2 - k(v-1)]\alpha_{2k}.$$

p'_a étant le genre arithmétique de la surface Φ.

6. D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} + p = r + 1.$$

Si nous désignons par p_a le genre arithmétique de F, le système $|$ C $|$ qui est régulier a la dimension

$$r = p_a + p(n - \pi + 1).$$

D'autre part, on a

$$r_0 \geqslant p'_a + n - \pi + 1,$$

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} \geqslant p(p'_a + n - \pi + 1) - \frac{\mathrm{A}}{p}$$

où A est la somme des termes en α_{2k+1} et α_{2k}.

Observons que dans les seconds membres des inégalités auxquelles satisfont les dimensions $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$, figurent tous les points unis de l'involution I, chacun avec une certaine multiplicité et un point uni figurera avec toutes les multiplicités qu'il peut avoir. On a donc

$$-\mathrm{A} = \frac{v}{6}(2v^2 - 9v - 5)\alpha = \frac{1}{6}v(v-5)p\alpha,$$

où α est le nombre total des points unis de l'involution.

Par suite,

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} \geqslant p(p'_a + n - \pi + 1) + \frac{v(v-5)}{6}\alpha.$$

Observons que p étant premier, $\nu(\nu - 5)$ est toujours multiple de 6, car ν ne peut être de la forme $3 + 1$.

On déduit de ce qui précède

$$6(p_a + 1) \geqslant 6p(p'_a + 1) + \nu(\nu - 5)\alpha. \tag{1}$$

7. Il existe une certaine relation entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de Φ. Nous allons la déterminer par la méthode indiquée dans notre ouvrage sur les involutions (1).

Considérons un faisceau de courbes Γ_0 et supposons que la classe de la surface Φ soit δ, c'est-à-dire qu'il y ait dans le faisceau δ courbes ayant un point double en dehors des points-base. Une courbe du faisceau passant par un point de diramation A′ contient une courbe γ_1 et une courbe γ_ν, elle présente donc $\nu + 2$ points doubles. L'invariant de Zeuthen-Segre de la surface Φ est donc

$$J' = \delta + (\nu + 2)\alpha - n - 4\pi.$$

Considérons le faisceau de courbes C_0 homologue. Pour calculer l'invariant de Zeuthen-Segre de F, on considère un second faisceau quelconque que l'on peut d'ailleurs supposer formé de courbes appartenant à l'involution, et la courbe T lieu des points de contact des courbes des deux faisceaux. Parmi les courbes C_0 du faisceau considéré, il y en a α passant par un point uni et ayant en ce point la multiplicité $\nu + 1$ avec un point multiple d'ordre ν en A_{11}. Il s'agit de savoir à combien de courbes du faisceau ayant un point double équivaut une courbe C_0 passant par un point uni. Nous suivrons une méthode analogue à celle utilisée par C. Segre dans un problème de même nature (2).

Le groupe de points A et A_{11} appartient à la courbe T et compte pour 2ν points de contact entre les courbes des deux faisceaux. Le nombre de points d'intersection de la courbe C_0 considérée et de la courbe T doit être multiple de p. On en conclut que la courbe T passe ν fois par les points A et A_{11}. Il y a donc ν branches de T passant par A_{11} et sur chacune d'elles il y a $2\nu - 1$ points équivalents à des

(1) *Théorie des involutions*... (loc. cit.), p. 108 et suiv.

(2) C. SEGRE, *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiore algebriche* (Atti della R. Accademia di Torino, 1895-96, pp. 341-357), *Opere* (Rome Edit. Cremonese, 1957), tome I, pp. 312-326). C. Segre considérait le cas où une courbe du faisceau a un point multiple à tangentes distinctes.

points doubles des courbes C_0 du faisceau considéré. L'invariant de Zeuthen-Segre de F est donc

$$J = p\delta + \nu(2\nu - 1)\alpha - pn - 4p(\pi - 1) - 4.$$

On en déduit

$$J + 4 = p(J' + 4) - 2(2\nu - 1). \tag{2}$$

D'autre part, un point de diramation A' est multiple d'ordre $\nu + 1$ pour la surface Φ et les courbes canoniques de celle-ci sont découpées par des variétés passant $\nu - 1$ fois par A'. Ces courbes canoniques rencontrent la courbe γ_ν en $\nu - 1$ points. Leurs transformées sur F passent donc $\nu - 1$ fois par ces points A et A_{11}. Il en résulte qu'entre les genres linéaires $p^{(1)}$ et $p'^{(1)}$ de F et de Φ on a la relation

$$p^{(1)} - 1 = p(p'^{(1)} - 1) + 2(\nu - 1)^2.$$

En utilisant la formule de Noether

$$J + p^{(1)} = 12p_a + 9,$$

on obtient finalement

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + 2\nu(\nu - 5)\alpha.$$

En comparant cette relation avec la relation (1), on voit que c'est le signe d'égalité qui est valable. Il en résulte que *les systèmes* $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$ *sont réguliers.*

On peut écrire

$$r_i = r_0 - \frac{1}{p}\sum_0^{\nu-1}[k^2 - k(\nu - 2) + 1]\alpha_{2k+1} - \frac{1}{p}\sum_1^{\nu}[k^2 - k(\nu - 1)]\alpha_{2k}.$$

Il est bien évident que les nombres

$$\sum_0^{\nu-1}[k^2 - k(\nu - 2) + 1]\alpha_{2k+1} + \sum_1^{\nu}[k^2 - k(\nu - 1)]\alpha_{2k}$$

doivent être multiples de p, ce qui implique certaines conditions auxquelles doivent satisfaire les nombres $\alpha_{2k+1}, \alpha_{2k}$.

Pour $p = 5$, on a

$$r_i = r_0 - \frac{1}{5}(\alpha_1 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4),$$

et par conséquent $r_i < r_0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Pour $p > 5$, on peut avoir des nombres r_i supérieurs à r_0.

Si un système linéaire régulier de courbes tracées sur une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier $\mathrm{p} = 2\nu + 1 > 3$ *n'ayant qu'un nombre fini de points unis du type* (1, 2) *contient* p *systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution dont l'un est dépourvu de points-base, les* p $-$ 1 *autres ont une dimension inférieure à celle du premier si* $\mathrm{p} = 5$. *Pour* $\mathrm{p} > 5$, *les dimensions de ces systèmes peuvent être inférieures ou supérieures à celle du premier système.*

8. Il est intéressant d'examiner le comportement de la structure des points unis vis-à-vis des axes de l'homographie H.

Attachons aux axes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie H respectivement les nombres $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$. Nous pouvons choisir ε de telle sorte que le plan tangent à F en un point uni A rencontre en un point A_1 l'espace σ_1 et en un point A_2 l'espace σ_2. Les hyperplans ξ_1 découpent sur F les courbes C_1 qui passent simplement par A en y touchant la droite $t_2 = AA_2$ et les hyperplans ξ_2 découpent sur F les courbes C_2 qui passent simplement par A en y touchant la droite $t_1 = AA_1$.

Supposons que les coordonnées des points de la surface F ne satisfassent à aucune équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre inférieur à $\nu + 1$. Il en sera de même de la surface F' projection à partir du point A de la surface F sur un hyperplan ξ_0. La surface F' passe par les points A_1A_2.

Au point A_1 sont attachés:

un plan ω_1 tangent à F' en A_1,

un espace linéaire ω_2 à cinq dimensions lieu des plans osculateurs en A_1 aux courbes tracées sur F' et passant par A_1,

....

un espace ω_k à $k(k + 3) : 2$ dimensions lieu des espaces à k dimensions k-osculateurs aux courbes tracées sur F' et passant par A_1 en ce point.

L'espace ω_k contient l'espace ω_{k-1} et est complètement déterminé par cet espace et un espace s_k à k dimensions ne rencontrant pas ω_{k-i}.

Les hyperplans passant par A_1 et contenant ω_k coupent F' suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre k en A_1 (1).

(1) Le cas examiné ici n'est pas une restriction mais a simplement pour but de rendre l'exposé plus aisé. Si la surface F satisfaisait à des équations linéaires aux dérivées partielles d'ordre au moins égal à deux, les espaces que nous avons désignés par s_k auraient une dimension moindre.

Les hyperplans ξ_{p-1} ou $\xi_{2\nu}$ coupent F suivant des courbes $C_{2\nu}$ ayant la multiplicité ν en A et A_{11}, donc les projections $C'_{2\nu}$ de ces courbes sur F' ont un point multiple d'ordre ν en A_1. On en conclut que les hyperplans $\xi_{2\nu}$ passent par l'espace ω_ν attaché au point A_1. L'espace ω_ν appartient donc à l'espace de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2\nu-2}$.

Les hyperplans $\xi_{2\nu-1}$ coupent F suivant des courbes $C_{2\nu-1}$ ayant en A la multiplicité $\nu - 1$ et en A_{11} la multiplicité $\nu - 1$. Le point A_1 est donc multiple d'ordre $\nu - 1$ pour les courbes $C'_{2\nu-1}$ projections des précédentes. Les hyperplans $\xi_{2\nu-1}$ contiennent donc l'espace $\omega_{\nu 1}$ attaché au point A_1 mais non l'espace ω_ν. Les hyperplans $\xi_{2\nu-1}$ passent par les axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2\nu-2}, \sigma_{2\nu}$ de H et $\omega_{\nu-1}$ appartient donc à l'espace de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2\nu-2}$.

Les courbes $C_{2\nu-2}$ passent $\nu - 1$ fois par les points A et A_{11}, donc leurs projections $C'_{2\nu-2}$ sur F' passent $\nu - 1$ fois par A_1. Il en résulte que les hyperplans $\xi_{2\nu-2}$ passent par ω_{s-1}, qui appartient ainsi à l'espace de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2\nu-3}$. On en conclut que l'espace ω_ν est déterminé par l'espace $\omega_{\nu-1}$ et par un espace s_ν à ν dimensions appartenant à l'espace $\sigma_{2\nu-1}$.

Les courbes C_{2k} passent k fois par A et par A_{11}, donc leurs projections C_{2k} sur F, ont la multiplicité k en A_1.

Les courbes C_{2k-1} ont la multiplicité k en A et $k - 1$ en A_{11}, donc leurs projections C'_{2k-1} sur F ont la multiplicité $k - 1$ en A_1. Les hyperplans ξ_{2k-1} contiennent l'espace ω_{k-1} mais non l'espace ω_k. Les courbes C_{2k-2} passent $k - 1$ fois par A et par A_{11} donc leurs projections C'_{2k-2} sur F' passent $k - 1$ fois par A_1. Les hyperplans ξ_{2k-2} contiennent ω_{k-1} et on en conclut que l'espace ω_k est déterminé par l'espace ω_{k-1} et par un espace s_k à k dimensions appartenant à σ_{2k-1}.

En particulier pour $k = 2$, on voit que l'espace s_2 appartient à σ_3.

Pour $k = 1$, remarquons que le plan tangent à F' en A_1 ne peut appartenir à σ_1, car alors les hyperplans ξ_2 contiendraient ω_s. Il faut donc que le plan tangent à F' en A_1, c'est-à-dire le plan ω_2, rencontre σ_2 suivant une droite.

Au point A_1 est attaché un espace ω_ν à $\nu(\nu + 3) : 2$ dimensions déterminé par le point A_1, une droite située dans σ_2, un plan situé dans σ_3, un espace à trois dimensions situé dans $\sigma_5, \ldots$, un espace à ν dimensions situé dans $\sigma_{2\nu-1}$.

9. Nous avons vu que les courbes $C_1, C_3, \ldots, C_{2\nu-1}$ passent par les points $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2\nu}$ infiniment voisins successifs du point A, le premier se trouvant sur t_2 et le dernier étant uni de première espèce pour l'involution I. Il en résulte que l'espace à ν dimensions, ν-osculateur en A aux courbes C_1, appartient aux hyperplans $\xi_1, \xi_3, \ldots, \xi_{2\nu-1}$, mais non aux hyperplans $\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{2\nu}$.

Les courbes $C'_1, C'_3, \ldots, C'_{2\nu-1}$ projections des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{2\nu-1}$ sur la surface F′ ont en A_2 un même espace à $\nu - 1$ dimensions osculateurs. Nous le désignerons par ω'.

Si $p = 3$, le point A_{21} est uni de première espèce pour l'involution. Si $\nu > 1$, comme nous en avons fait l'hypothèse dans ce travail, il n'en est plus de même et le point A_{21} est uni de seconde espèce pour l'involution. Il en est de même du point A_2 pour l'involution sur la surface F′.

Le plan osculateur aux courbes C_1 en A se projette de A suivant la tangente aux courbes C'_1 en A_2. Ce point étant uni de seconde espèce, cette droite ne peut appartenir à σ_2 et rencontre en un point un autre axe de l'homographie H. Ce ne peut être qu'un axe d'indice pair d'après la remarque faite plus haut. C'est donc un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2\nu}$ par exemple l'axe σ_{2k} ($k > 1$). Soit A_k ce point.

Projetons la surface F′ du point A_2 sur un hyperplan ξ_0 distinct de celui qui contient F′. Nous obtenons une surface F″ qui passe par A_k. Si $\nu > 2$, le point A_k est comme A_{22} un point uni de seconde espèce et l'espace à trois dimensions osculateur aux courbes C_1 en A a pour homologue une tangente à F″ en A_k. Celle-ci ne peut appartenir à σ_{2k} et rencontre en un point un des axes de H. d'indice pair, distinct de σ_2. Et ainsi de suite

Au point A_2 est associé un espace ω' à $\nu - 1$ dimensions déterminé par A_2 et par $\nu - 1$ points situés un dans chacun des espaces $\sigma_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_{2\nu}$ pris dans un certain ordre.

Si nous projetons la surface F de l'espace à ν dimensions osculateur aux courbes C_1 en A sur un espace intersection de ν espaces ξ_0, nous obtenons une surface F_ν sur laquelle le dernier des points rencontrés est uni de première espèce pour l'involution correspondant à I. En ce point, le plan tangent à F_ν rencontre suivant une droite un des axes de l'homographie H.

10. Il nous reste à prouver l'existence de surfaces algébriques

possédant les propriétés énoncées plus haut. Nous le ferons en recourant aux surfaces que nous avons définies autrefois ([1]).

Soit dans un espace $S_{\nu+4}$ à $\nu + 4$ dimensions l'homographie H' d'équations

$$x'_0 : x'_1 : \ldots : x'_{\nu+2} : y'_1 : y'_2 = x_0 : x_1 : \ldots : x_{\nu+2} : \varepsilon y_1 : \varepsilon^2 y_2.$$

La surface F' d'équations

$$y_1 y_2^{\nu} = \varphi_{\nu+1}, y_1^3 y_2^{\nu-1} = \varphi_{\nu+2}, \ldots, y_1^{2k+1} y_2^{\nu-k} = \varphi_{\nu+k+1}, \ldots,$$
$$y_1^{2\nu-1} y_2 = \varphi_{2\nu}, y_1^p = \varphi_p, y_2^p = \psi_p,$$

où les φ et ψ sont des formes algébriques en $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}$ dont le degré est indiqué par l'indice, est transformée en soi par H' et cette homographie engendre sur la surface une involution cyclique d'ordre $p = 2\nu + 1$. Les points unis de cette involution appartiennent à l'espace σ à $\nu + 2$ dimensions d'équations $y_1 = y_2 = 0$ et sont les points d'intersection des hypersurfaces

$$\varphi_{\nu+1} = 0, \varphi_{\nu+2} = 0, \ldots, \varphi_{2\nu} = 0, \varphi_p = 0, \psi_p = 0,$$

les polynomes des premiers membres étant choisis de manière à n'avoir qu'un nombre fini de solutions.

La surface F' est d'ordre

$$\alpha = p^2 \binom{2\nu}{\nu} \nu!$$

et l'involution a α points unis.

Désignons par G_0 les sections de F' par les hyperplans passant par σ et par G_1, G_2 les sections de F' par les hyperplans $y_2 = 0$, $y_1 = 0$. La courbe G_1 touche la droite $A0_1$ en tout point uni A et la courbe G_2 touche la droite $A0_2$ en tout point uni (Nous appelons 0_1 le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf y_1 et 0_2 le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf y_2).

La surface F', intersection complète d'hypersurfaces, est régulière et son système canonique est découpé par les hypersurfaces d'ordre $2p(2\nu - 1)!!$ On peut prendre un nombre λ suffisamment élevé pour que le système $| C |$ découpé sur F par les hypersurfaces d'ordre λ

([1]) *Sur l'existence de surfaces algébriques possédant des points de diramation de structure donnée* (Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, 1954, pp. 1-6).

soit régulier. Ce système contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, à savoir les systèmes

$$|C_0| = |\lambda G_0|, |C_1| = |(\lambda - 1)G_0 + G_1|, |C_2| = |(\lambda - 1)G_0 + G_2|, \ldots,$$
$$|C_{2k}| = |(\lambda - k)G_0 + kG_1|, |C_{2k+1}| = |(\lambda - 1)G_0 + kG_1 + G_2|, \ldots,$$
$$|C_{2\nu}| = |(\lambda - \nu)G_0 + \nu G_1|.$$

Nous désignerons par $|\Gamma_0|, |\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{2k}|, |\Gamma_{2k+1}|, \ldots, |\Gamma_{2\nu}|$ les systèmes de courbes qui leur correspondent sur la surface Φ' image de l'involution. Ces systèmes sont réguliers.

Si nous désignons par p_a le genre arithmétique de la surface Φ' et par n et π le degré et le genre des courbes de $|\Gamma_0|$, ce système a la dimension

$$r_1 = p'_a + n - \pi + 1.$$

Considérons le système $|C_{2k}|$. En tout point uni de l'involution, ses courbes ont le même comportement que la courbe kG_1. La dimension du système est donc

$$r_{2k} = r_0 - \frac{1}{p}[k^2 - k(\nu - 2) + 1]\alpha.$$

On a de même

$$r_{2k+1} = r_0 - \frac{1}{p}k(k - \nu + 1)\alpha.$$

Observons que pour $k < \nu - 1$, le système $|C_{2k+1}|$ a une dimension supérieure à celle de $|C_0|$. Si d'autre part i satisfait à l'inégalité $\nu(i + 1) > (i - 1)^2$, la dimension de $|C_{2k}|$ est également supérieure à celle de $|C_0|$. Dans tous les autres cas, elle est inférieure.

11. On peut trouver aisément les équations d'un modèle projectif de la surface Φ' dans l'espace σ à $\nu + 2$ dimension. Il suffit d'éliminer y_1, y_2 entre les équations de F'. On obtient

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{\nu+1} & \varphi_{\nu+2} & \cdots & \varphi_{2\nu-1} & \varphi_{2\nu} \\ \varphi_{\nu+2} & \varphi_{\nu+3} & \cdots & \varphi_{2\nu} & \varphi_p \end{Vmatrix} = 0,$$
$$\varphi_{\nu+1}^2\varphi_{2\nu-1} = \varphi_p\psi_p.$$

C'est une surface d'ordre $\alpha : p$ possédant α points de diramation multiples d'ordre $\nu + 1$, le cône tangent en chacun d'eux étant formé d'un cône d'ordre ν et d'un plan contenant une génératrice du cône.

Liège, le 10 décembre 1970.