Bulletin de la Classe des sciences

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des systèmes linéaires partiels de courbes tracées sur une surface algébrique composés au moyen d'une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis symétriques, appartenant à cette surface et faisant partie d'un même système linéaire.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique

(seconde note),

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination des systèmes linéaires partiels de courbes tracées sur une surface algébrique composés au moyen d'une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis symétriques, appartenant à cette surface et faisant partie d'un même système linéaire.

Dans notre première note [1] nous avons considéré une surface contenant une involution n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce. Nous considérons ici le même problème mais en supposant que l'involution ne possède qu'un nombre fini de points unis de seconde espèce, que nous avons appelé symétriques et dont la définition sera rappelée plus loin.

Comme dans notre première note, nous partons d'un modèle projectif de la surface F sur lequel l'involution est déterminée par une homographie H de période p, p étant premier impair. Nous supposerons encore que l'espace ambiant de la surface est suffisamment élevé pour que l'homographie H possède p axes ponctuels distincts. Le système des sections hyperplanes de F contient alors p systèmes linéaires appartenant à l'involution et nous supposerons que l'un d'eux est dépourvu de points-base, ce qui ne restreint pas la généralité, pourvu que la dimension de l'espace ambiant soit suffisamment élevée. Les autres

[1] La première note a paru dans le Bulletin de l'Académie, 1970, pp. 1192-1204.

systèmes ont pour points-base les points unis de l'involution et leurs dimensions sont inférieures à celle du premier système.

Nous considérons le cas où le système des sections hyperplanes de F est son système canonique et nous terminons en étudiant un cas particulier.

1. Soit F une surface algébrique appartenant à un espace S_r à r dimensions, transformée en soi par une homographie cyclique dont la période est un nombre premier impair $p = 2\nu + 1$, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier seul rencontre la surface en un nombre fini de points. Sur la surface, H détermine une involution cyclique I d'ordre p possédant comme points unis les points de rencontre de la surface avec σ_0.

Nous supposerons que les points unis de l'involution I sont tous des points unis symétriques [1]. Ces points sont caractérisés de la manière suivante: Soit A un des points unis. Dans le plan tangent à F en A, H détermine une homographie h. Si nous désignons par x_0, x_1, x_2 les coordonnées des points du plan tangent, le point A étant donné par $x_1 = x_2 = 0$, le point A est dit uni symétrique si h a pour équations

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \varepsilon x_1 : \varepsilon^{p-1} x_2,$$

ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité.

L'homographie h peut aussi être représentée par

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 = x_0 : \eta^{p-1} x_1 : \eta x_2$$

en posant $\eta = \varepsilon^{p-1}$. C'est pour cette raison que nous avons appelé ces points unis symétriques.

Il résulte de ce qui précède que le plan tangent à F en un point uni A rencontre deux des espaces unis $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ chacun en un point. L'homographie h détermine dans le faisceau de rayons de sommet A une involution ayant deux droites unies t_1, t_2. Chacune d'elles rencontre un des axes de l'homographie H distinct de σ_0.

Nous désignerons par $| C |$ le système des sections hyperplanes de la surface F et nous le supposerons régulier, quitte à le remplacer par

(1) *Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Revista Matematica y Fisiga teorica de la Universidad de Tucuman, 1940, pp. 283-291). Voir aussi notre ouvrage sur la *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Éd. Cremonese, 1963) Chap. II, § 2.

un de ses multiples convenablement choisi. Les hyperplans passant par les axes de H sauf par σ_k seront désignés par ξ_k; ils découpent sur F les courbes d'un système linéaire partiel $|\, C_k \,|$ appartenant à l'involution I et dont nous désignerons la dimension par r_k.

Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions. Il correspond dans cet espace à la surface F une surface Φ image de l'involution. A un point uni de l'involution correspond sur la surface Φ un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins successifs $\nu - 1$ point doubles biplanaires dont le dernier est ordinaire.

Les courbes C_0 passant par un point uni A y acquièrent un point double à tangentes fixes t_1, t_2. Celles de ces courbes, que nous désignerons par C'_0, assujetties à toucher en A une droite distincte de t_1, t_2 acquièrent en A un point quadruple avec deux tangentes doubles t_1, t_2. Et ainsi de suite. Finalement, on obtient un système de courbes que nous désignerons par C_0^ν qui ont en A un point multiple d'ordre 2ν avec deux tangentes t_1, t_2 multiples d'ordre ν. Les courbes C_0^ν assujetties à toucher en A une droite distincte de t_1, t_2 acquièrent en ce point la multiplicité p et ont des tangentes variables.

Nous désignerons par $|\, \Gamma_0 \,|$ $|\, \Gamma_1 \,|$ $\ldots$, $|\, \Gamma_{p-1} \,|$ les systèmes linéaires complets de courbes qui correspondent sur Φ aux systèmes $|\, C_0 \,|$ $|\, C_1 \,|, \ldots, |\, C_{p-1} \,|$.

Si n est le degré du système $|\, \Gamma_0 \,|$, la surface F est d'ordre pn. Si π est le genre des courbes Γ_0, les courbes C ont le genre $p(\pi - 1) + 1$.

2. Considérons un point uni A et soit A' le point de diramation correspondant sur Φ. Nous supposerons que le plan tangent à F en A rencontre en un point chacun des axes σ_1, σ_{p-1} de H. Nous désignerons par t_1, t_2 les droites projetant ces points de A.

Rappelons qu'au point de vue des transformations birationnelles le point A' est équivalent à 2ν courbes rationnelles de degré virtuel $-2 \, (p = 2\nu + 1)$

$$\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}, \ldots, \gamma_{21}, \gamma_{21}$$

dont chacune rencontre la précédente et la suivante en un point (γ_{11} rencontre seulement γ_{12} et γ_{21} seulement γ_{22}).

Les courbes C_0 passant par A, c'est-à-dire les courbes C'_0, ont pour homologues sur Φ les courbes Γ_0 rencontrant en un point chacune des courbes γ_{11}, γ_{21}. Les courbes C_0 qui ont un point quadruple en A ont pour homologues sur Φ les courbes Γ_0 qui rencontre en un point chacune des courbes γ_{12}, γ_{22} mais ne rencontrent pas les autres.

Les courbes C_0^k qui ont un point multiple d'ordre $2k$ en A avec comme tangentes t_1, t_2 ont pour homologues sur Φ les courbes Γ_0 rencontrant en un point chacune des courbes γ_{1k}, γ_{2k} mais ne rencontrent pas les autres. Enfin, les courbes C_0^ν qui ont un point multiple d'ordre 2ν en A ont pour homologues les courbes rencontrant les courbes $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}$ sans rencontrer les autres. Les courbes C_0 qui ont un point multiple d'ordre p en A avec les tangentes variables ont pour homologues les courbes Γ_0 qui passent par le point commun aux courbes $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}$. Le point commun à $\gamma_{1\nu}, \gamma_{2\nu}$ représente les points de F infiniment voisins de A.

3. Les hyperplans ξ_1 passant par $\sigma_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ découpent sur F les courbes C_1, ayant en A un point simple dont la tangente est t_2. Il correspond à ces courbes sur Φ les courbes Γ_1 rencontrant en un point la courbe γ_{21} sans rencontrer les autres.

De même, les hyperplans ξ_{p-1} passant par $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-2}$ découpent sur F les courbes C_{p-1} passant simplement par A en y touchant t_1. Les courbes Γ_{p-1} correspondantes rencontrent en un point la courbe γ_{11} mais ne rencontrent pas les autres.

Considérons les hyperplans ξ_2. Ils passent par les espaces $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_{p-1}$ et contiennent par conséquent le plan tangent en A à F. Les courbes C_2 ont donc un point au moins double en A. Ce ne peut être un point double à tangentes t_1, t_2 car alors ces courbes coïncideraient avec les courbes C_0', ce qui est absurde.

Le système $| 2C |$ se comporte vis-à-vis des points unis de l'involution comme le système $| C |$. Il contient notamment un système $| (2C)_2 |$ qui se comporte en A comme le système $| C_2 |$. Les courbes $2C_1$ appartiennent au système $| (2C)_2 |$ et ont en A un point double dont les deux tangentes coïncident avec t_2. Parmi les courbes de $| (2C)_2 |$ se trouvent les courbes $C_0 + C_2$ donc les courbes C_2 ont un point double en A, les deux tangentes coïncidant avec t_2. Les courbes Γ_2 rencontrent en un point la courbe γ_{22} mais ne rencontrent pas les autres.

Les hyperplans ξ_3 passant par σ_0 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_{p-1}$ contiennent le plan tangent à F en A et les courbes C_3 ont un point au moins triple en ce point. Le système $|(2C)_3|$ contient les courbes $C_1 + C_2$ et les courbes $C_0 + C_3$, donc les courbes C_3 ont un point triple en A, les trois tangentes étant confondues avec t_2. Les courbes Γ_2 rencontrent la courbe γ_{22} en un point mais ne rencontrent pas les autres.

Et ainsi de suite. Les courbes $C_4, C_5, \ldots, C_\nu$ ont respectivement les multiplicités 4, 5, ..., ν en A, les tangentes étant toujours confondues avec t_2. Les courbes $\Gamma_4, \Gamma_5, \ldots, \Gamma_\nu$ rencontrent en un point respectivement les courbes $\gamma_{24}, \gamma_{25}, \ldots, \gamma_{2\nu}$ mais ne rencontrent pas les autres.

Le même raisonnement montre que les courbes C_{p-2} ont un point double en A, les deux tangentes étant confondues avec t_1. Les courbes C_{p-3} ont un point triple en A, les tangentes confondues avec t_1... Les courbes $C_{p-\nu} = C_{\nu+1}$ ont en A la multiplicité ν avec les ν tangentes confondues avec t_1. Les courbes $\Gamma_{p-2}, \Gamma_{p-3}, \ldots, \Gamma_{\nu+1}$ rencontrent en un point chacune des courbes $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \ldots, \gamma_1\nu$ sans rencontrer les autres.

Parmi les courbes $C_{\nu+1}$ se trouvent des courbes ayant un point multiple d'ordre $\nu + 1$ en A, les tangentes étant confondues avec t_2. Ce sont des cas particuliers des courbes rencontrées plus haut, mais qui sont obtenues avec le raisonnement du début.

Observons que les courbes $C_k + C_{p-k}$ $(k \leqslant \nu)$ sont des courbes du système $|(2C)_0|$ ayant un point multiple d'ordre $2k$ en A.

4. De ce qui précède, on déduit que les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ passent par les points unis de l'involution en présentant les singularités précédentes. Les courbes C_1 par exemple passent une fois par un certain nombre de points unis, deux fois avec tangente double en un certain nombre d'autres points unis, ..., ν fois par les derniers points unis avec une seule tangente.

Remarquons que si A est multiple d'ordre k pour les courbes C_i avec t_2 comme tangente unique, il est aussi multiple d'ordre k pour les courbes C_{p-i}, avec t_1 comme tangente unique. Les courbes C_i passent par un certain nombre de points unis fixes infiniment voisins de A dont le premier se trouve sur t_2 et que les courbes C_{p-i} passent par des points unis fixes infiniment voisins de A, le premier se trouvant sur t_1. Ces deux configurations présentent le même aspect, comme on le verra d'ailleurs dans nos travaux antérieurs (loc. cit.).

Ceci rappelé, désignons par φ le nombre des points d'intersection de deux courbes C_i absorbés par les points infiniment voisins de A, qui est le même que celui des points d'intersection de deux courbes C_{p-1} absorbés par les points infiniment voisins de A, le nombre des points d'intersection de deux courbes C_0^i absorbés en A est $(2k)^2 + 2\varphi$. Mais d'autre part, les courbes Γ_0^k forment un système de degré $n - 2k$, donc on a

$$\varphi = k(p - 2k).$$

Il en résulte que le nombre de points d'intersection de deux courbes C_i (ou C_{p-i}) absorbés en A est $k^2 + \varphi = k(p - k)$.

Cherchons maintenant l'influence du point A sur le genre des courbes C_i et C_{p-i}.

Le genre d'une courbe Γ_0^k est $\pi - k$ et dans la correspondance entre cette courbe et la courbe C_k homologue, il y a deux points de diramation. Le genre d'une courbe C_k est donc $p(\pi - k)$. D'autre part, si nous représentons par ψ l'abaissement du genre produit par les points infiniment voisins de A dont il a été question plus haut, ce genre est donné par

$$p(\pi - 1) + 1 - k(2k - 1) - 2\psi$$

et on doit donc avoir

$$p(\pi - 1) + 1 - k(2k - 1) - 2\psi = p(\pi - 1),$$

d'où

$$\psi = \frac{1}{2}(k - 1)(p - 2k - 1).$$

L'abaissement du genre produit par la singularité en A d'une courbe C_i ou C_{p-i} est donc égal à

$$\frac{1}{2}k(k - 1) + \frac{1}{2}(k - 1)(p - 2k - 1) = \frac{1}{2}(k - 1)(p - k - 1).$$

5. Supposons que les courbes C_i aient aux points unis de l'involution α_{i1} points simples, α_{i2} points doubles, ..., $\alpha_{i\nu}$ points multiples d'ordre ν.

Le degré du système $|G_i|$ est

$$pn - \Sigma\alpha_{ik}k(p - k), \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

et le degré de $|\Gamma_i|$ est donc

$$n_i = n - \frac{1}{p}\Sigma\alpha_{ik}k(p-k).$$

Le genre des courbes C_i est

$$p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}\Sigma(k-1)(p-k-1)\alpha_{ik}.$$

Entre une courbe Γ_i et la courbe C_i homologue, nous avons une correspondance $(1, p)$ présentant un point de diramation pour chaque valeur de k, c'est-à-dire

$$\alpha = \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{i\nu}.$$

points de diramation. Le genre π_i des courbes Γ_i est donné par

$$2p(\pi_i - 1) + (p-1)\alpha = 2p(\pi - 1) - \Sigma(k-1)(p-k-1)\Sigma\alpha_{ik}.$$

On a donc

$$\pi_i = \pi - \frac{1}{2p}\Sigma k(p-k)\alpha_{ik}.$$

Par le théorème de Riemann-Roch, la dimension de $|\Gamma_i|$ satisfait à l'inégalité

$$r_i \geqslant p'_a + n - \pi + 1 - \frac{1}{2p}\Sigma k(p-k)\alpha_{ik}. \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \qquad (1)$$

p'_a étant le genre arithmétique de la surface Φ.

Nous avons établi plus haut que si les courbes C_1 avaient la multiplicité k en un point uni A, il en était de même des courbes C_{p-1}. Attachons à chacun des espaces $\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ une racine de l'unité, respectivement $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$. Dans ces conditions, le raisonnement fait pour les courbes C_1, C_{p-1} peut se répéter pour les courbes C_i, C_{p-i}. Précisément, si les courbes C_i ont la multiplicité k en un point uni A, il en est de même des courbes C_{p-i}. La seule différence est que les tangentes (uniques) sont distinctes. On a donc

$$\alpha_{ik} = \alpha_{p-i-k}$$

et par conséquent,

$$r_i = r_{p-i}.$$

6. Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de Φ, on a la relation

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) - (p^2 - 1)\alpha.$$

Le système $|\,C\,|$ étant régulier, sa dimension est

$$r = p_a + pn - p(\pi - 1),$$

ou, en tenant compte de la formule précédente,

$$r = p(p'_a + n - \pi + 1) - \frac{1}{3}\nu(\nu + 1)\Sigma\alpha_{ik}.$$

D'autre part, d'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} + p = r + 1,$$

c'est-à-dire

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} = p(p'_a + n - \pi + 1) - \frac{1}{3}\nu(\nu + 1)\sum_i\sum_k\alpha_{ik}. \quad (2)$$

Nous avons

$$r_0 \geqslant p'_a + n - \pi + 1$$

et on a donc, d'après la formule (1),

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} \geqslant p(p'_a + n - \pi + 1) - \mathrm{A},$$

A étant la somme des termes complémentaires dans les formules (1) pour $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Dans A se trouvent les multiplicités des différents points unis pour les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$. Or, chacun de ces points se trouve compté deux fois, avec les multiplicités $1, 2, \ldots, \nu$, chacune de ces multiplicités étant donc comptées deux fois. Dn a donc

$$\mathrm{A} = \frac{2}{2p}\alpha\Sigma k(p - k),$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\nu(\nu + 1)\alpha.$$

Par conséquent, on a

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} \geqslant p(p'_a + n - \pi + 1) - \frac{1}{2}\nu(\nu + 1)\alpha.$$

En comparant à l'égalité (2), on voit que c'est le signe d'égalité qui est valable.

Les systèmes linéaires complets $|\Gamma_0|, |\Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$ *sont réguliers et les* p $-$ 1 *derniers ont des dimensions inférieures à celle du premier.*

On peut observer que p étant premier, l'expression $\nu(\nu+1)$ est toujours multiple de 3 pour $\nu > 1$. Si $\nu = 1$ et $p = 3$, α doit être multiple de 3.

D'autre part, les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ étant des entiers, les nombres α_{ik} sont tels que

$$\Sigma(k-1)(p-k-1)\alpha_{ik}, \quad \Sigma k(p-k)\alpha_{ik}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \nu)$$

soient des multiples de $2p$.

Il ne semble pas possible d'imposer d'autres conditions aux nombres α_{ik} en dehors de $\alpha_{ik} = \alpha_{p-i-k}$.

Si un système linéaire régulier de courbes tracées sur une surface algébrique F *contenant une involution cyclique d'ordre premier* p $\geqslant$ 3 *n'ayant qu'un nombre fini de points unis tous symétriques, contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution dont l'un est privé de points-base, les* p $-$ 1 *systèmes restants ont des dimensions inférieures à celle du premier et ces* p $-$ 1 *systèmes se répartissent en* (p $-$ 1) : 2 *couples de systèmes ayant la même dimension.*

7. Les considérations précédentes sont encore valables si $|C|$ est le système canonique de la surface F, à condition toutefois que celle-ci soit régulière ($p_a = p_g$).

On sait qu'alors, les transformées des courbes canoniques de Φ ne passent pas par les points unis. Le système canonique de Φ est donc $|\Gamma_0|$ et Φ est évidemment régulière.

Le genre linéaire de Φ est donc π et on a $n = \pi - 1$. Le système $|C|$ a le degré $p(\pi - 1)$ et le genre linéaire de F est $p(\pi - 1) + 1$.

8, Construisons maintenant un exemple de la surface F, exemple que nous tirons d'une construction plus générale que nous avons faite dans un travail antérieur [1].

---

[1] *Sur l'existence de surfaces algébriques possédant des points de diramation de structure donnée* (Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni, 1954, pp. 1-6). *Théorie des involutions cycliques...* (*Loc. cit.*), pp. 119-120.

Considérons dans un espace $S_{\nu+4}$ à $\nu + 4$ dimensions, l'homo-H' d'équations

$$\rho x_i' = x_i, \beta y_1' = \varepsilon y_1, \rho y_2' = \varepsilon^{p-1} y_2, \qquad (i = 0, 1, \ldots, \nu + 2)$$

où ε est une racine primitive d'ordre $p = 2\nu + 1$, premier.

L'homographie H' possède deux axes ponctuels: un espace σ_1 à $\nu + 2$ dimensions donné par $y_1 = y_2 = 0$ et une droite σ_2 donnée par $x_i = 0$. Nous désignerons par $0_1, 0_2$ les points dont toutes les coordonnées sont nulles sauf y_1 pour 0_1 et y_2 pour 0_2.

Considérons ensuite la surface F' d'équations

$$y_1 y_2 = \varphi_2, y_1^2 y_2^2 = \varphi_4, \ldots, y_1^\nu y_2^\nu = \varphi_{2\nu},$$
$$y_1^p = \varphi_p, y_2^p = \psi_p,$$

où les φ et ψ sont des formes algébriques en $x_0, x_1, \ldots, x_{\nu+2}$ dont le degré est indiqué par l'indice.

La surface F' est d'ordre $2^\nu.p^2,\nu!$. Elle est transformée en soi par l'homographie H' qui détermine sur la surface une involution cyclique I d'ordre p. La surface F' ne passe pas par la droite $\sigma_2 = 0_1 0_2$ et rencontre σ_1 aux points donnés par

$$\varphi_2 = 0, \varphi_4 = 0, \ldots, \varphi_{2\nu} = 0, \varphi_p = 0, \psi_p = 0.$$

On peut choisir les équations précédentes de manière que ces hypersurfaces n'aient qu'un nombre fini de points en commun. Ces points, au nombre de $2^\nu.p^2.\nu!$, sont les points unis de l'involution I.

Le plan tangent à F' en un de ces points unis A passe par la droite $0_1 0_2$ et dans ce plan, dans le faisceau de rayons de sommet A, H' détermine une homographie possédant des droites unies $A0_1, A0_2$ dépendant de ε et ε^{p-1}. Les points unis de l'involution sont donc des points unis symétriques.

Désignons par G_0 les sections de F' par les hyperplans passant par l'espace σ_1 par G_1 la section de F' par l'hyperplan $y_1 = 0$ et par G_2 la section par $y_2 = 0$.

Considérons le système $| C |$ des courbes découpées sur F' par les hypersurfaces d'ordre p. Ce système contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution, à savoir

$$| C_0 | = | pG_0 |, | C_1 | = | (p-1)G_0 + G_1 |, \ldots,$$
$$| C_{p-k} | = | (p-k)G_0 + kG_1 |, \ldots, | C_{p-1} | = | G_0 + (p-1)G_1 |.$$

Aux courbes G_0, G_1, G_2 sont attachés les nombres $1, \varepsilon, \varepsilon^{p-1}$ donc aux systèmes précédents sont attachés respectivement les nombres $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^k, \ldots, \varepsilon^{p-1}$.

Le système $|C_0|$ est dépourvue de points-base et irréductibles, les autres ont pour points-base les $\alpha = 2^\nu . p^2 . \nu_1$ points unis de l'involution.

Observons que les courbes $(p-1)G_0 + G_2, (p-2)G_0 + 2G_2, \ldots, (p-k)G_0 + kG_2, \ldots, G_0 + (p-1)G_2$ appartiennent respectivement aux systèmes $|C_{p-1}|, |C_{p-2}|, \ldots, |C_{p-k}|, \ldots, |C_1|$.

9. Il importe d'examiner le comportement des courbes C_k en un point uni A. Le système $|C_k|$ contient les courbes $(p-k)G_0 + kG_1$ et ces courbes ont un point multiple d'ordre k en A avec une tangente unique AO_2. Le système contient aussi les courbes $kG_0 + (p-k)G_2$ qui ont en A la multiplicité $p-k$ avec une seule tangente AO_1. Il en résulte que la multiplicité des courbes C_k en A est le plus petit des nombres $k, p-k$.

La multiplicité d'un point uni quelconque A pour les courbes C_k est donc égale à k pour $k \leqslant \nu$ et à $p-k$ pour $k \geqslant \nu$.

On voit donc que dans ce cas particulier, les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ ont le même comportement en chaque point uni de l'involution. Il en résulte que l'on a, avec les notations précédentes,

$$r_i = p'_a + n - \pi + 1 - \frac{1}{3}\nu(\nu+1)\alpha. \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1).$$

On peut également écrire

$$r_i = r_0 - \frac{1}{3}\nu(\nu+1)\alpha.$$

On pourrait calculer le genre arithmétique de la surface F en utilisant la formule que nous avons établie récemment [1] et par suite celui de la surface Φ' image de l'involution. Cela n'est pas utile pour notre objet, qui est de prouver l'existence de surface F possédant les propriétés énumérées au n° 1. Notons d'ailleurs que ces calculs sans être difficiles, sont assez longs.

[1] *Sur les surfaces intersections complètes de variétés algébriques* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1970, pp. 865-870).

10. On peut obtenir aisément les équations d'un modèle projectif de la surface Φ'. Il suffit de projeter de la droite $0_1 0_2$ la surface F sur l'espace σ_1, c'est-à-dire d'éliminer y_1, y_2 entre les équations de la surface F'. On obtient ainsi les équations

$$\varphi_{2h}\varphi_{2k} = \varphi_{2(h+k)}, \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, h + k)$$

$$\varphi_2^p = \varphi_2^{p-2}\varphi_4 = \varphi_2^{p-3}\varphi_6 = \ldots = \varphi_p\psi_p.$$

C'est une surface d'ordre $2^\nu p\nu$! On vérifie facilement l'existence des points doubles de diramation.

Liège, le 7 décembre 1970.