Bulletin de la Classe des sciences

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (première note)

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des systèmes linéaires partiels de courbes tracées sur une surface algébrique composés au moyen d'une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce appartenant à cette surface et faisant partie d'un même système linéaire.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Nouvelles recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique

(première note),

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination des systèmes linéaires partiels de courbes tracées sur une surface algébrique composés au moyen d'une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce appartenant à cette surface et faisant partie d'un même système linéaire.

Dans nos recherches antérieures sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis [1], nous nous sommes surtout occupé de la détermination de la structure des points unis et de celle des points de diramation correspondants sur une surface image de l'involution. Nous nous proposons ici de nous occuper d'un autre problème.

Nous avons montré *(loc. cit.)* que l'on peut prendre comme modèle projectif d'une surface algèbrique F contenant une involution cyclique I d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini de points unis, une surface d'un espace S_r à r dimensions sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie H possédant p axes ponctuels dont un seul rencontre la surface F (aux points unis de l'involution). Cela signifie que l'on peut trouver sur F un système linéaire | C | contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution et

[1] Pour un exposé de ces recherches, voir notre ouvrage *Les involutions cycliques appartenant à une surface algèbrique et applications* (Rome Édit. Cremonese, 1963).

dont l'un est privé de points-base. Les autres systèmes ont pour points-base les points unis de l'involution. Notre but dans cette note est de déterminer la dimension de ces différents systèmes dans l'hypothèse où le système $|C|$ est régulier, hypothèse qui est toujours licite pour r assez grand. Nous examinerons également le cas où le système $|C|$ est le système canonique de F, supposée dans ce cas régulière.

Dans cette note, nous supposerons que les points unis de l'involution sont de première espèce, c'est-à-dire que dans le plan tangent à la surface en un A de ces points unis, l'homographie H détermine une homologie de centre A.

Dans une seconde note, nous étudierons le cas où les points unis sont des points unis symétriques.

I

1. Soit F une surface algébrique appartenant à un espace linéaire S_r à r dimensions transformée en soi par une homographie H de période p, p étant premier et supérieur à 2, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ dont le premier seul rencontre la surface en un nombre fini de points. Sur F, H engendre une involution I, d'ordre premier p, possédant un nombre fini de points unis, les points de rencontre de σ_0 avec la surface.

Nous supposerons que tous les points unis de l'involution sont de première espèce c'est-à-dire que dans le plan tangent à F en un de ces points A, l'homographie H détermine une homologie de centre A et dont l'axe est situé dans un des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$.

Nous désignerons par A_1 les points unis dont les plans tangents rencontrent l'espace σ_1, par A_2 ceux dont les plans tangents rencontrent $\sigma_2, \ldots$, par A_{p-1} ceux dont les plans tangents rencontrent σ_{p-1}. Nous supposerons qu'il y a α_1 points A_1, α_2 points $A_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ points A_{p-1}.

Nous désignerons par ξ_k les hyperplans passant par les axes de l'homographie sauf par σ_k. Ces hyperplans découpent sur F des courbes $|C_k|$ formant un système linéaire dont la dimension sera désignée par r_k. Ces systèmes, pour $k = 0, 1, \ldots, p - 1$ appartiennent au système des sections hyperplanes de F qui sera désigné par $|C|$ Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base mais les autres ont comme points-base les points unis de l'involution.

Rappelons que l'on peut prendre r assez grand pour que le système $|C|$ soit régulier.

Rappelons en second lieu que les courbes $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$ ont, dans un certain ordre, les multiplicités $1, 2, \ldots, p-1$ en un point uni ([1]).

Rapportons projectivement les courbes C_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions. Il correspond à la surface F dans cette espace une surface Φ image de l'involution I en ce sens qu'à un point de Φ correspondent les points d'un groupe de l'involution.

A un point uni de l'involution correspond sur la surface Φ un point multiple d'ordre p de celle-ci, le cône tangent en ce point étant rationnel ([2]). La surface Φ contient donc $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{p-1}$ points de diramation multiples d'ordre p.

Rappelons encore que les courbes C_0 passant par un point uni y acquièrent un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

2. Le système $|2C|$ possède également les mêmes propriétés que le système $|C|$, c'est-à-dire qu'il contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I, systèmes que l'on peut représenter par $2C_0$, $C_0 + C_1, C_0 + C_2, \ldots, C_0 + C_{p-1}$.

Les courbes C_1 sont découpées sur F par les hyperplans ξ_1 qui passent par $\sigma_0, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ et coupent la droite s_1, intersection de σ_1 avec le plan tangent à F en un point A_1, suivant un point. Les courbes C_1 ont donc en chacun des points A_1 un point simple à tangente variable.

L'ensemble de deux courbes C_1, où une courbe $2C_1$ appartient au système $|2C|$ et a un point double en un point A_1. Elle appartient donc à l'un des systèmes $C_0 + C_2, C_0 + C_3, \ldots, C_0 + C_{p-1}$, par exemple au premier. Les courbes C_2 ont donc des points doubles aux points A_1.

Une courbe $C_1 + C_2$ appartient au système $|2C|$ et possède un point triple en un point A_1. Nous pouvons supposer qu'elle appartient au système désigné par $C_0 + C_3$. Les courbes C_3 ont donc des points triples aux points A_1.

([1]) *Sur les points unis parfaits des involutions appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société roy. des Sciences de Liège, 1937, pp. 37-45).

([2]) *Les involutions cycliques* (loc. cit. pp. 45-46).

Et ainsi de suite. On voit que les courbes $C_1, C_2, ..., C_{p-1}$ ont les multiplicités $1, 2, ..., p-1$ aux différents points A_1.

Le même raisonnement peut être fait pour tous les points unis. Observons que les courbes des systèmes $|C_1|, |C_2|, ..., |C_{p-1}|$ ne peuvent avoir la même multiplicité en un point uni. Une courbe C_k a, dans un certain ordre, les multiplicités $1, 2, ..., p-1$ en tout point uni.

Nous pouvons attacher aux axes $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{p-1}$ de l'homographie H une racine primitive d'ordre p de l'unité, par exemple respectivement $\varepsilon^p = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{p-1}$.

Les courbes $C_k + C_{p-k}$ appartiennent au système $|2C_0|$ et ont donc un point multiple d'ordre p en tout point uni. Les multiplicités des courbes C_k et C_{p-k} en un point uni ont donc p pour somme.

3. Supposons que les coordonnées des points de la surface F ne satisfassent à aucune équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre inférieur à $p+1$. Dans ces conditions les courbes qui ont un point double en un point de F sont découpées par des hyperplans contenant le plan tangent en ce point. Celles qui ont un point triple en ce point sont découpées par des hyperplans contenant un espace linéaire à cinq dimensions contenant le plan tangent... Celles qui ont un point k-uple en ce point passent par un espace linéaire à $k(k+3):2$ dimensions. Et ainsi de suite.

Cela étant, les hyperplans ξ_2 découpant les courbes C_2 qui ont un point double en un point A_1, contiennent l'espace σ_1 et par conséquent la droite s_1 intersection de cet espace avec le plan tangent à F en A_1.

Les hyperplans ξ_3 qui découpent sur F les courbes C_3 qui ont un point triple en A_1, contiennent un espace à cinq dimensions contenant lui-même le plan tangent à F en A_1. Cet espace ne peut appartenir à σ_1 car alors les courbes C_2 auraient un point triple en A_1. Il doit donc être déterminé par le point A_1, la droite s_1 et un plan s_2 appartenant à σ_2.

De même, les hyperplans ξ_4 découpant sur F les courbes C_4 ayant un point quadruple en A_1, passent par un espace à 9 dimensions déterminé par le point A_1, la droite s_1, le plan s_2 et un espace à trois dimensions s_3 appartenant à l'espace σ_3.

Et ainsi de suite. Les hyperplans ξ_{p-1} découpent sur F les courbes

C_{p-1} qui ont un point multiple d'ordre $p-1$ en A_1 passent par un espace à $(p-1)(p+2):2$ dimensions déterminé par le point A_1, la droite s_1, le plan s_2, ..., un espace à $p-2$ dimensions contenu dans σ_{p-2}.

Les courbes C_0 passant par A_1 y acquièrent un point multiple d'ordre p. Les hyperplans qui les découpent passent donc par un espace à $p(p+3):2$ dimensions déterminé par l'espace précédent et par un espace à $p-1$ dimensions s_{p-1} appartenant à σ_{p-1}.

On voit donc qu'à chaque point uni de l'involution est attaché un espace à $p(p+3):2$ dimensions s'étalant sur les axes de l'homographie H de la manière indiquée plus haut.

L'hypothèse que les coordonnées des points de F ne satisfont a aucune équation linéaire aux dérivées partielles n'est pas une restriction. Dans le cas contraire, les espaces attachés aux axes de l'homographie auraient des dimensions moindres, mais le raisonnement subsiste.

4. Désignons par $|\Gamma_0|, |\Gamma_1|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$ les systèmes linéaires complets qui correspondent sur la surface Φ respectivement aux systèmes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{p-1}|$. Le premier, $|\Gamma_0|$, est le système des sections hyperplanes de Φ.

Soient n l'ordre de la surface Φ et π le genre de ses sections hyperplanes Γ_0. La surface F est d'ordre pn et les courbes C sont de genre $p(\pi-1)+1$.

Les courbes de $|C_1|$ ont des points simples aux points A_1, des points doubles aux points A_2, ..., des points $(p-1)$-uples aux points A_{p-1}, donc le degré du système $|C_1|$ est

$$np-\alpha_1-4\alpha_2-\cdots-k^2\alpha_k-\cdots-(p-1)^2\alpha_{p-1}.$$

Le degré du système $|\Gamma_1|$ est par suite

$$n_1=n-\frac{1}{p}[\alpha_1+4\alpha_2+\cdots+k^2\alpha_k+\cdots+(p-1)^2\alpha_{p-1}].$$

Le genre des courbes C_1 est

$$p(\pi-1)+1-\alpha_2-3\alpha_3-\cdots-\frac{1}{2}k(k-1)\alpha_k-\cdots-\frac{1}{2}(p-1)(p-2)\alpha_{p-1}.$$

Dans la correspondance $(1,p)$ existant entre une courbe Γ_1 et la courbe C_1 homologue, il y a

$$\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k+\cdots+(p-1)\alpha_{p-1}.$$

points de diramation, donc par la formule de Zeuthen le genre π_1 des courbes Γ_1 est donné par

$$2p(\pi_1 - 1) + (p - 1)\Sigma k\alpha_k = 2p(\pi - 1) - \Sigma k(k - 1)\alpha_k,$$

d'où

$$\pi_1 - 1 = \pi - 1 - \frac{1}{2p}\Sigma k(p + k - 2)\alpha_k. \qquad (k = 1, 2, \cdots, p - 1).$$

La dimension du système $|\Gamma_1|$, c'est-à-dire du système $|C_1|$, est donnée par le théorème de Riemann-Roch, p'_a étant le genre arithmétique de Φ,

$$r_1 \geqslant p'_a + n_1 - \pi_1 + 1$$

c'est-à-dire

$$r_1 \geqslant p'_a + n - \pi + 1 + \frac{1}{2p}\Sigma k(p - k - 2)\alpha_k.$$

On remarquera que le coefficient de α_{p-1} est nul.

Observons que si les courbes C_1 passent k fois par un point A_k, les courbes C_{p-k} passent $p - k$ fois par ce point. On a donc

$$r_{p-1} \geqslant p'_a + n - \pi + 1 + \frac{1}{2p}\Sigma(k - 2)(p - k)\alpha_k.$$

5. Pour trouver des formules analogucs pour les dimensions de $|C_2|, |C_3|, \ldots, |C_{p-2}|$, il suffit de remplacer ε par une autre racine primitive de l'unité. Ainsi par exemple pour trouver la formule relative à $|C_2|$, il suffit de poser $\eta = \varepsilon^2$. Les nombres $1, \eta, \eta^2, \ldots$ η^{p-1} sont alors attachés aux systèmes

$$|C_0|, |C_2|, |C_4|, \cdots, |C_{2k}|, \cdots, |C_{p-1}|, |C_1|, \cdots, |C_{2k+1}|, \cdots, |C_{p-2}|.$$

On trouve ainsi, en posant $p = 2\nu + 1$,

$$r_2 \geqslant p'_a + n - \pi + 1 + \frac{1}{2p}[(\nu + 1)(\nu - 2)\alpha_1 + \cdots + \nu(\nu - 1)\alpha_{p-1}].$$

6. Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de Φ, nous avons la relation (¹)

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + (p - 1)(p - 5)\alpha,$$

(¹) *Les involutions cycliques* (loc. cit., p. 108).

où $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_{p-1}$ est le nombre des points unis de l'involution I.

Le système $| C |$ étant régulier, sa dimension est donnée par le théorème de Riemann-Roch,

$$r = p_a + pn - p(\pi - 1)$$

ou, en tenant compte de la valeur de p_a,

$$r = p(p'_a + 1) + \frac{1}{12}(p-1)(p-5)\alpha - 1.$$

On observera que p étant premier, $(p-1)(p-5)$ est toujours divisible par 12.

D'après la théorie des homographie, on a

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} + p = r + 1 = p(p'_a+1) + \frac{1}{12}(p-1)(p-5)\alpha. \quad (1)$$

La dimension r_0 de $| \Gamma_0 |$ c'est-à-dire celle de $| C_0 |$ satisfait à l'inégalité

$$r_0 \geqslant p'_a + n - \pi + 1.$$

On a donc

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} \geqslant p(p'_a + n - \pi + 1) + \mathrm{A},$$

où A représente la somme des seconds membres des formules donnant $r_0, r_1, ..., r_{p-1}$.

On peut calculer A de la manière suivante:

Un point A_k est, dans un certain ordre, multiple d'ordre 1, 2, 3, ..., p − 1 pour les courbes $C_1, C_2, C_3, ..., C_{p-1}$. On obtiendra donc dans A le coefficient du terme en α_k en faisant la somme des termes $k(p-k-2)$ pour $k = 1, 2, ..., p-1$. On trouve ainsi le terme

$$\frac{1}{2p}\frac{p(p-1)(p-5)}{6}\alpha_k = \frac{1}{12}(p-1)(p-5)\alpha_k.$$

Cela étant, on aura

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} \geqslant p(p'_a + n - \pi + 1) + \frac{1}{12}(p-1)(o-5).$$

En comparant à l'équation (1), on voit que les systèmes $| \Gamma_0 |$, $| \Gamma_1 |, ..., | \Gamma_{p-1} |$ sont réguliers et que le signe d'égalité est valable dans les formules précédentes.

On peut d'ailleurs écrire

$$r_1 = r_0 + \frac{1}{2p} \Sigma k(p - k - 2) \alpha_k.$$

et des formules analogues pour $r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$.

Les nombres $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ étant des entiers, les expressions $\Sigma k(p - k - 2) \alpha_k$ doivent être multiples de $2p$. De même, l'expression $p_a + 5$, doit être multiple de p.

7. Pour $p = 3$, on a

$$r_1 = r_0 - \frac{1}{3}\alpha_2, \quad r_2 = r_0 - \frac{1}{3}\alpha_1$$

et les dimensions des systèmes $| C_1 |, | C_2 |$ sont inférieures à celle de $| C_0 |$. Les nombres α_1, α_2 sont divisibles par 3.

Pour $p = 5$, on a

$$r_1 = r_0 + \frac{1}{5}(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_4),$$

$$r_2 = r_0 + \frac{1}{5}(\alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4),$$

$$r_3 = r_0 + \frac{1}{5}(\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3),$$

$$r_4 = r_0 + \frac{1}{5}(-2\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4),$$

Dans ce cas on a d'ailleurs

$$p_a + 1 = 5(p'_a + 1).$$

On voit que pour $p > 3$, les dimensions des systèmes $| C_1 |, | C_2 |$ ... $| C_{p-1} |$ sont supérieures à celle de $| C_0 |$.

En général r_k et r_{p-k} sont distincts. Ils ne sont égaux que si on a $\alpha_k = \alpha_{p-k}$, quel que soit k (1). Remarquons que si $p = 5$ et $\alpha_1 = \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_3$, les systèmes $| C_1 |, | C_2 |, | C_3 |, | C_4 |$ ont la même dimension que $| C_0 |$.

(1) C'est dans cette hypothèse que nous nous étions placé dans notre note *Sur les surfaces contenant une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1968, pp. 981-989).

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si un système linéaire régulier de courbes tracées sur une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier $p \geqslant 3$ *n'ayant que des points unis de première espèce en nombre fini, contient* p *systèmes linéaires partiels composés avec l'involution dont l'un est privé de points-base, les* $p-1$ *autres systèmes ont des dimensions supérieures à celle du premier si* $p > 3$, *inférieures si* $p = 3$.

II

8. Supposons maintenant que la surface F soit régulière et possède un système canonique $|K|$ privé de points-base et contenant p systèmes linéaires appartenant à l'involution dont l'un est privé de points-base. Soient $|K_0|, |K_1|, \ldots, |K_{p-1}|$ ces systèmes, le premier étant dépourvu de points-base. Supposons que le modèle projectif de la surface F ait pour sections hyperplanes les courbes canoniques K. L'involution I est déterminée sur F par une homographie H' de l'espace ambiant. Nous désignerons encore par $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ les axes de cette homographie et nous supposerons que seul le premier rencontre la surface F. Les dimensions des axes seront encore désignées par $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$.

Nous avons démontré que le système transformé du système canonique de la surface Φ avait un point-base multiple d'ordre $p-2$ en chaque point uni de l'involution. Nous désignerons ce système par $|K_{p-2}|$.

Le système bicanonique $|2K|$ se comporte aux points unis comme le système $|K|$. En particulier il existe dans le système bicanonique un système dépourvu de points-base appartenant à l'involution et les courbes de ce système passant par un point uni y acquièrent un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Nous désignerons par $|(2K)_0|$ ce système.

Une courbe quelconque K_{p-2} appartient à quelques courbes bicanoniques du système $|(2K)_0|$ qui ont, en chaque point uni, la multiplicité p. La courbe K_{p-2} a en ces points la multiplicité $p-2$, donc elle est complétée par des courbes K ayant un point double en chaque point uni et appartenant à un des systèmes $|K_1|, |K_2|, \ldots$. Nous supposerons pour fixer les idées qu'elles appartiennent au système $|K_2|$.

Une courbe irréductible du système $| 2K_2 |$ appartient à un système composé au moyen de l'involution. Dans ce système sont comprises des courbes formées d'une courbe K_0 et d'une courbe K ayant des points quadruples aux points unis. Ces courbes forment un système appartenant à l'involution et que nous supposerons être le système $| K_4 |$.

De la même manière nous formerons les systèmes $| K_6 |$, $| K_8 |$, ..., $| K_{2\nu} |$ en posant $p = 2\nu + 1$.

Cela étant, il existe des courbes du système $| (2K)_0 |$ qui contiennent une courbe $K_{2\nu}$. Elles sont complétées par des courbes K passant simplement par les points unis et qui forment un système que nous désignerons par $| K_1 |$.

En considérant les courbes $K_1 + K_2$, $K_1 + K_4$, ... nous montrerons l'existence des systèmes $| K_3 |$, $| K_5 |$, ..., $| K_{p-1} |$ dont les courbes passent respectivement 3 fois, 5 fois, ..., $p - 1$ fois par les points unis.

9. Les hyperplans ξ_1 qui découpent sur F les courbes K_1 passent par $\sigma_0, \sigma_2, ..., \sigma_{p-1}$ et ne peuvent rencontrer le plan tangent à F en un point uni que suivant une seule tangente, donc ce plan tangent rencontre l'espace σ_1 suivant une droite.

Les plans tangents à la surface F aux points unis rencontrent tous suivant une droite l'espace σ_1.

Les hyperplans ξ_2 découpent sur F les courbes K_2. Ils contiennent l'espace σ_1 et par conséquent les plans tangents à F aux points unis. Cela montre que les courbes K_2 ont des points doubles aux points unis.

Supposons encore, comme plus haut, que les coordonnées des points de F ne satisfont à aucune équation linéaire aux dérivées partielles d'ordre inférieur à $p + 1$.

Les courbes K_3 découpées par les hyperplans ξ_3 passant par σ_0, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, ..., \sigma_{p-1}$ ont des points triples aux points unis. Ils doivent donc passer par des espaces à 5 dimensions déterminés par un point uni, la droite intersection du plan tangent avec σ_1 et par un plan appartenant nécessairement à σ_2, car s'il appartenait à σ_1, les courbes K_2 auraient des points triples aux points unis.

On voit de même qu'il existe un espace à 9 dimensions attaché à chaque point uni et déterminé par ce point uni, par son plan tangent à F, par un plan appartenant à σ_2 et par un espace à 3 dimensions appartenant à σ_3. Et ainsi de suite. A chaque point uni est attaché un espace linéaire à $p(p+3):2$ dimensions passant par ce point et rencontrant l'espace σ_4 suivant un espace à $k+1$ dimensions $(k = 1, 2, ..., p-1)$.

10. Désignons par π le genre des courbes K'_0 qui correspondent sur Φ aux courbes K_0. Le genre des courbes K_0 et par suite des courbes K est

$$p^{(1)} = p(\pi - 1) + 1$$

et le degré du système canonique $|K|$ est donc $p(\pi - 1)$. Donc le degré de $|K'_0|$ est égal à $\pi - 1$.

Cela étant, le degré du système K_i est égal à

$$p(\pi - 1) - \alpha' i^2,$$

α' étant le nombre des points unis de l'involution. Le degré du système $|K'_i|$ homologue de $|K_i|$ sur la surface Φ est donc

$$\pi - 1 - \frac{\alpha'}{p} i^2,$$

ce qui montre que α' est multiple de p. Nous poserons $\alpha' = p\alpha$ et le degré de $|K'_i|$ sera

$$n_i = \pi - 1 - \alpha i^2.$$

Le genre de la courbe K_i est

$$p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2} i(i-1) p\alpha.$$

Par conséquent le genre π_i de la courbe K'_i, donné par la formule de Zeuthen, est

$$2p(\pi_i - 1) + p(p-1)\alpha_i = 2p(\pi - 1) - i(i-1) p\alpha.$$

On en déduit

$$\pi_i = \pi - \frac{1}{2} i(p + i - 2)\alpha.$$

On a

$$n_i - \pi_i + 1 = \frac{1}{2} i(p - i - 2)\alpha.$$

Les systèmes $|K'_0|, |K'_1|, \dots, |K'_{p-3}|, |K'_{p-1}|$ qui correspondent sur Φ respectivement aux systèmes $|K_0|, |K_1|, \dots, |K_{p-3}|, |K_{p-1}|$ ne sont pas spéciaux et par conséquent leurs dimensions satisfont aux inégalités

$$r_i \geqslant p'_a + \frac{1}{2}i(p-i-2)\alpha. \qquad (i = 0, 1, \cdots, p-3, p-1)$$

Le système homologue de $|K_{p-2}|$ est le système canonique de la surface Φ et a donc la dimension $p'_a - 1$.

11. Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F, nous avons la relation

$$p_a + 1 = p(p'_a + 1) + \frac{1}{12}(p-1)(p-5)\alpha'.$$

D'après la théorie des homographies, nous devons avoir

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} + p = p_a = p(p'_a + 1) + \frac{1}{12}(p-1)(p-5)\alpha.$$

Or, on a trouvé

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} \geqslant pp'_a + \frac{1}{12}(p-1)(p-5)\alpha.$$

C'est donc le signe d'égalité qui est valable et les systèmes $|K'_0|$, $|K'_1|, |K'_2|, \dots, |K'_{p-1}|$ sont réguliers.

Si le système canonique d'une surface algébrique régulière F contenant une involution cyclique I *d'ordre premier p n'ayant qn'un nombre fini de points unis de première espèce, est dépourvu de points-base et contient p systèmes linéaires appartenant à l'involvtion, l'un est le transformé du système canonique de la surface image de l'involution et les autres ont des dimensions supérieures à celle du premier si $p > 3$, un système de dimension supérieure et un de dimension inférieure si $p = 3$.*

12. Il nous reste à prouver qu'il existe des surfaces F satisfaisant aux conditions indiquées plus haut (n° 8).

Soit dans un espace S_{p-1} à $p-1$ dimensions une homographie H″ de période p d'équations

$$\rho y'_i = y_i, \quad \rho z'_0 = \varepsilon z_0, \quad \rho z'_1 = \varepsilon z_1, \qquad (i = 0, 1, \cdots, p-3)$$

ayant pour axes un espace σ_1 à $p-3$ dimensions $z_0 = z_1 = 0$ et une droite σ_2 d'équations $y_0 = y_1 = \ldots = y_{p-3} = 0$.

Les hypersurfaces d'ordre p premier supérieur à 2 transformées en elles-mêmes par H″ et ne passant pas par les axes de cette homographie ont une équation qui, en adoptant la notation des formes algébriques de Clebsch, peut s'écrire

$$a_y^p + b_z^p = 0.$$

Considérons la surface F intersection complète de $p-3$ de ces hypersurfaces linéairement indépendantes. Elle est d'ordre p^{p-3} et l'homographie H″ détermine sur cette surface une involution cyclique I d'ordre p ayant p^{p-3} points unis situés dans l'espace σ_1. Le plan tangent à F en un de ces points unis passe par la droite σ_2 et H″ détermine dans ce plan une homologie d'axe σ_2. Les points unis de l'involution I sont donc tous de première espèce.

Les courbes canoniques K de F sont découpées par les hypersurfaces d'ordre

$$n = p(p-3) - p = p(p-4).$$

qui ne contiennent pas la surface.

Le système | K | contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. Le système | K_0 | est découpé par les hypersurfaces d'équation

$$a_y^n + b_y^{n-p} b_z^p + \cdots + l_y^p l_z^{n-p} + m_z^n = 0$$

qui nc conticnnent pas F. Il est dépourvu de points-base. Les autres systèmes ont des équations qui commencent par les termes $a_y^{n-1} a_z$, $a_y^{n-2}\, a_z^2, \ldots, a_y a_z^{n-1}$. Le transformé du système canonique de la surface Φ image de l'involution a pour équation

$$a_y^{n-p+2} a_z^{p-2} + a_y^{n-2p+2} a_z^{2p-2} + \cdots = 0.$$

13. Le genre arithmétique de F est égal à [1]

$$p_a = (3p^3 - 23p^2 + 45p - 1)\, p^{p-2} - 1.$$

On en déduit

$$p'_a = (3p^4 - 23p^3 + 44p^2 + 5p - 5) p^{p-4} - 1.$$

Le système transformé du système canonique de Φ a la dimension $p'_a - 1$ et celui qui est dépourvu de points-base a la dimension p'_a.

Liège, le 10 novembre 1970.

[1] *Sur les involutions appartenant à des variétés algébriques intersections complètes d'hypersurfaces* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1944, pp. 301-317), *Sur les surfaces intersections complètes de variétés algébriques* (Idem, 1970, pp. 865-870).