GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE—**Lucien Godeaux**, *Sur des surfaces algébriques liées à une courbe de genre trois.* Note présentée par M. Hepites, M.A.R., dans la séance du 7 janvier 1916.

Avant de commencer l'étude systématique des involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique, il nous a paru utile d'étudier d'une façon approfondie quelques cas particuliers différents des cas où l'on a affaire à des surfaces dont les courbes canoniques ou pluricanoniques existantes ont l'ordre zéro ($P_{12} = 1$). Nous étudierons par suite les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à la surface F image

*

des couples de points (non ordonnés, d'une courbe de genre trois, non hyperelliptique. Les propriétés de cette surface F sont bien connues, elle a été étudiée successivement par MM. G. HUMBERT (*C. R.* 1896), F. SEVERI (*Atti di Torino*, 1908, *Memorie di Torino* 1903) M. DE FRANCHIS (*Rend. di Palermo*, 1903), L. REMY (*Journal de Liouville*, 1908, *Annales de l'Ecole Normale*, 1909). Elle a les genres

$$p_g = 3, \; p_a = 0, \; \overset{\infty}{p} = 7, \; \mathrm{I} = 2.$$

1.—Soient A une courbe de genre trois, non hyperelliptique, que nous supposerons être une courbe plane du quatrième ordre, F une surface, dépourvue de courbes exceptionnelles, représentant les couples de points, non ordonnés, de la courbe A.

Une courbe canonique C de F est l'image d'une $g_4^1$ canonique de A. Le système canonique $|C|$ de F est dépourvu de points-base. Le système bicanonique $|2C|$ est, par définition, adjoint à $|C|$; il est, par le théorème de M. PICARD (*Journal de Crelle*, 1905; voir aussi PICARD et SIMART, *Traité*, t II, p. 437; SEVERI, *Rend. R. Acad. Lincei*, 1908) régulier et, par le théorème de RIEMANN-ROCH, de dimension $P_2 = 7$. De même, on a $P_3 = 19$, $P_4 = 37$ et, en général, $P_i = 3\,i\,(i-1) + 2$, pour $i \geqslant 2$.

La surface F possède un système continu $\Sigma$, de degré 1 et d'indice 2, de courbes H de genre trois, birationnellement identiques à A. Une courbe H provient des couples de points de A dont un point est fixe. Le système $\Sigma$ a pour enveloppe la courbe K lieu des points de F image des couples de points de A formés de deux points coïncidents.

2.—Soient $P_1$ un point quelconque de F; $P_{11}$, $P_{12}$ les points de A correspondants à $P_1$; $P_{21}$, $P_{22}$ les points de A complétant le groupe canonique déterminé par $P_{11}$, $P_{12}$;

$P_2$ le point de F représentant le couple $P_{21}$, $P_{22}$. Le point $P_2$ est déterminé sans ambiguité par $P_1$ et réciproquement. La surface F possède donc une transformation birationnelle T en elle-même. Cette transformation est involutive; nous désignerons par $\Phi$ l'involution (d'ordre 2) qu'elle engendre, ou une surface représentative de cette involution.

Le système $|C|$ est composé avec l'involution $\Phi$. Il lui correspond, sur la surface $\Phi$, le système canonique $|\boldsymbol{\Gamma}|$.

L'involution $\Phi$ possède 28 points de coïncidence correspondants aux 28 bitangentes de la courbe A.

La surface $\Phi$ a les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$ $I = 41$, $P_2 = 7$, $P_3 = 13, \ldots$, $P_i = \frac{1}{2}\, 3\, i\,(i-1) + 4$ pour $i > 1$.

3.—On peut prendre, comme modèle projectif de $\Phi$, soit le plan triple canonique dont la courbe de diramation est d'ordre 12 (Severi), soit une surface du sixième ordre, de $S_3$, en relatian avec la surface de Kummer (Humbert). On peut prendre également les surfaces $i$—canoniques $(i > 1)$ qui sont simples.

Commençons par remarquer que le système $i$—canonique est simple, si $i > 1$. En effet, s'il était composé, ce ne pourrait être qu'avec l'involution d'ordre trois définie par $|\boldsymbol{\Gamma}|$. Alors, sur le plan triple canonique, les courbes $i$—canoniques seraient des courbes triples d'ordre $i$ et on n'aurait pas $P_i = \dfrac{3i\,(i\text{-}1)}{2} + 4 \qquad (i > 1)$.

Rapportons projectivement les courbes $i\boldsymbol{\Gamma}$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $P_i - 1 = \dfrac{1}{2}\, 3i\,(i-1) + 3$ dimensions. On obtient une surface $i$—canonique simple, $\boldsymbol{\Phi}_i$, d'ordre $3i^2$, à sections hyperplanes de genre $\dfrac{3}{2} i\,(i+1) + 1$, en correspondance birationnelle avec $\boldsymbol{\Phi}$.

D'après nos recherches antérieures, la surface $\boldsymbol{\Phi}_i$ possède 28 pointc doubles coniques qui sont les points de diramaticn *(Mémoires de la Faculté des Sciences de*

*Toulouse*, 1914). Désignons par $\Gamma_1$, $\Gamma_2, \ldots$, $\Gamma_{28}$ les 28 courbes rationnelles aux quelles sont équivalents ces 28 points. On a *(loc. cit.)* des systèmes linéaires de courbes tels que

$$\Gamma_{ik} + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \ldots\ldots\ldots + \Gamma_{28} \equiv 2\, i\, k\ \Gamma.$$

On doit avoir $i < 1$, $k > 1$ si $i = 2$.

En particulier, on a ce théorème:

*Pour qu'une surface d'ordre 12, à sections hyperplanes de genre 10, de $S_6$, représente l'involution* $\Phi$ *appartenant à F, il faut et il suffit que:*

a. *Elle possède 28 points doubles coniques;*

b. *Parmi les hypersurfaces d'ordre 4 passant par ces 28 points, il y en ait qui touchent la surface en chaque point d'intersection.*

4. — Désignons par H une courne de F image d'une $g^1_3$ spéciale de A. Si la courbe A est à modules généraux, les courbes C, H forment une base de déterminant — 3. La surface F a donc le nombre base $\rho = 2$.

A la courbe H corespond, sur $\Phi$, une courbe canonique $\Gamma$; à la courbe C correspond une courbe canonique (comptée deux fois). Si l'on tient compte des 28 points doubles ou courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3, \ldots$, $\Gamma_{28}$, on voit que le nombre-base de $\Phi$ est $\rho = 29$.

On en conclut, en utilisant laf ormule bien connue de de M. Picard, que $\Phi$ possède $\rho_0 = 14$ intégrales doubles de seconde espèce.

Front Belge, le 10 décembre 1915.