SUR
LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES
DE JONQUIÈRES
DE L'ESPACE

PAR

Lucien GODEAUX

BRUXELLES
M. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE
112, Rue de Louvain, 112

—

1922

AVANT-PROPOS

On désigne généralement par « transformation de Jonquières » entre deux plans π_1, π_2 une transformation birationnelle qui change un faisceau de droites de π_1 en un faisceau de droites de π_2. Aux droites de π_1 correspondent alors dans π_2 des courbes d'ordre n, formant un réseau ayant un point-base $(n-1)^{\text{uple}}$, et à l'ensemble des droites de π_2 correspond, dans π_1, un réseau de courbes de même nature.

Dans ce mémoire, nous nous proposons d'étudier les transformations birationnelles de l'espace qui changent un faisceau de plans en un faisceau de plans et une congruence linéaire de droites en une congruence linéaire de droites. Ces transformations sont des généralisations à l'espace de la transformation de Jonquières entre deux plans, et pour cette raison, nous les avons appelées « transformations de Jonquières de l'espace ».

La théorie des transformations birationnelles de l'espace a été commencée vers la même époque par trois géomètres : Cremona (*), Cayley (**) et Nœther (***). Depuis lors, si les

---

(*) CREMONA, *Sulle trasformazioni razionali nello spazio.* (ANNALI DI MATEMATICA, 1871 (2), V, pp. 131-162; Opere Matematiche. Milano, 1917, t. III, p. 298.)

(**) CAYLEY, *On the rational transformation between two spaces.* (PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEM. SOC., 1869-1871, pp. 127-180. Mathematical Papers. Cambridge, 1894, vol. VII, p. 189.)

(***) NOETHER, *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen.* (MATH. ANN., 1871, III, pp. 547-580.)

géomètres ont étudié de nombreux types particuliers de transformations birationnelles, la théorie générale a été quelque peu délaissée (*). Nous citerons un mémoire important de M[lle] Beloch (**) et un travail de M. Pannelli (***). Nous avons cru que l'étude systématique d'un type général de transformations birationnelles pourrait présenter un certain intérêt; c'est pourquoi nous nous permettons de présenter ce mémoire à l'Académie royale.

Nous commençons, dans ce mémoire, par étudier les transformations birationnelles entre les droites de deux congruences linéaires de droites. Cette étude se ramène à celle des transformations birationnelles entre deux plans, une fois introduite la notion de droite fondamentale. (Chap. I[er].)

Nous considérons alors les deux faisceaux de plans homographiques (a_1), (a_2) et deux congruences linéaires de droites G_1, G_2 liées par une correspondance birationnelle. Nous définissons la transformation de Jonquières par la propriété de faire correspondre à un point P le point situé à l'intersection du plan de (a_2) correspondant au plan de (a_1) passant par P, et du rayon de G_2 correspondant au rayon de G_1 passant par P. Nous déterminons les éléments fondamentaux de la correspondance. (Chap. II.)

Les chapitres suivants sont consacrés à l'étude des transformations de Jonquières lorsque la nature des congruences G_1, G_2 est fixée explicitement. Toutefois, nous avons exclu de nos

---

(*) Pour la bibliographie, on peut consulter : LORIA, *Il passato et il presente delle principali teorie geometriche.* Torino, 1906.

(**) BELOCH, *Sulle trasformazioni birazionali nello spazio.* (ANNALI DI MATHEMATICA, 1909 (3), XVI, pp. 27-69.)

(***) PANNELLI, *Sopra una proprietà delle trasformazioni birazionali nello spazio ordinario.* (REND. R. ACCAD., Lincei, 1[er] sem. 1910 (5), XIX, pp. 449-455.)

considérations le cas où G_1, G_2 seraient des gerbes de droites. Dans ce cas, on obtient des transformations monoïdales, déjà considérées par De Paolis (*).

Il nous a paru intéressant d'étudier quelques cas particuliers des transformations rencontrées. A cet effet, nous nous sommes proposé la recherche des transformations de Jonquières fournissant des congruences linéaires de cubiques gauches comme transformées de congruences linéaires de droites. Les congruences de cubiques gauches ainsi déterminées sont des cas particuliers de congruences très générales, mais nous ont cependant semblé intéressantes.

(*) De Paolis, *Sopra un sistema omaloidico di superficie d'ordine* n *con un punto* ($n-1$)*plo*. (Giornale di Battaglini, 1875, XIII.)

SUR
LES TRANSFORMATIONS BIRATIONNELLES
DE JONQUIÈRES
DE L'ESPACE

CHAPITRE PREMIER.

Correspondances birationnelles entre les droites de deux congruences linéaires.

1. — Réseaux de degré un de surfaces d'une congruence linéaire de droites. — Soit G une congruence linéaire de droites de classe m. Nous dirons qu'une surface réglée Φ est une *surface de la congruence* G lorsque ses génératrices sont des droites de la congruence.

Deux surfaces de la congruence G ne se rencontrent, en dehors des courbes singulières de G, qu'en des droites de cette congruence.

Considérons un système ∞^2, $|\Phi|$ de surfaces de la congruence G. Nous dirons que ce système est un *réseau de degré un de la congruence* G s'il satisfait aux conditions suivantes :

a) Deux droites de G, non communes à toutes les surfaces de $|\Phi|$, déterminent une et une seule surface de Φ;

b) En dehors des courbes singulières de G et des droites de G communes à toutes les surfaces de $|\Phi|$, deux surfaces de $|\Phi|$ n'ont en commun qu'une droite de G.

Le système $|\Phi|$ constitue un réseau de surfaces au sens ordinaire du mot, c'est-à-dire que par deux points, non communs à toutes les surfaces du système, passe une et une seule surface $|\Phi|$. En effet, par chacun de ces points passe une droite de G et ces deux droites déterminent une et une seule surface de $|\Phi|$.

Une droite de G, commune à toutes les surfaces de $|\Phi|$, sera appelée *droite-base* de ce réseau.

Considérons un plan π ne contenant qu'un nombre fini de points singuliers de G et faisons correspondre à une droite de G le point où elle rencontre π, et réciproquement. Les sections des surfaces de $|\Phi|$ par le plan π constituent évidemment un réseau de degré un de courbes planes. Réciproquement, si l'on considère dans π un réseau de degré un de courbes planes, la surface de G, lieu des droites de cette congruence s'appuyant sur une courbe de ce réseau, engendre un réseau de degré un de G.

Par exemple, les surfaces d'ordre $m+1$, lieux des droites de G s'appuyant sur les droites de π, engendrent un réseau de degré un possédant m droites-base : les droites de G situées dans π.

Les propriétés des réseaux de degré un de courbes planes se transportent sans difficulté aux réseaux de degré un de surfaces de G. Par exemple :

Les surfaces Φ sont rationnelles.

Les surfaces de $|\Phi|$ passant par une droite de G (qui ne soit pas droite-base du réseau) forment un faisceau, et réciproquement, les surfaces de $|\Phi|$ formant un faisceau ont en commun, en dehors des droites-base de $|\Phi|$, une droite de G.

Les surfaces de $|\Phi|$ n'ont pas de droites multiples variables.

Le réseau $|\Phi|$ est complètement déterminé lorsqu'on fixe l'ordre des surfaces Φ, leurs multiplicités le long des courbes singulières de G et les droites-base du réseau (avec leurs multiplicités).

Il existe une infinité de réseaux de degré un de surfaces de G.

2. — Première définition de la correspondance birationnelle θ. — Considérons deux congruences linéaires de droites G_1, G_2, respectivement de classes n_1, n_2. Soient $|\Phi_1|$ un réseau de degré un de surfaces de G_1, $|\Phi_2|$ un réseau de degré un de G_2.

Rapportons projectivement les surfaces des réseaux $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$. Par une droite g_1 de G_1 distincte des droites-base de $|\Phi_1|$ passent ∞^1 surfaces Φ_1 formant un faisceau. Il leur correspond ∞^1 surfaces de $|\Phi_2|$ formant également un faisceau. Ces surfaces ont, par suite, en commun en général, en dehors des droites-base de $|\Phi_2|$, une seule droite g_2 de G_2. Inversement, à une droite de G_2 distincte des droites-base de $|\Phi_2|$ correspond en général une droite de G_1 distincte des droites-base de $|\Phi_1|$.

En établissant une projectivité entre les réseaux $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, nous avons donc établi une correspondance birationnelle θ entre les droites de G_1, G_2 distinctes des droites-base des réseaux.

3. — Droites fondamentales pour la correspondance θ. — Cherchons à étendre cette correspondance θ aux droites-base des réseaux $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$.

Appelons surface R_1 (ou R_2) relative à une droite r, le lieu des droites de G_1 (ou de G_2) s'appuyant sur la droite r. Les surfaces R_1 sont d'ordre n_1+1, les surfaces R_2 d'ordre n_2+1.

Considérons une droite-base d_1 de $|\Phi_1|$ et la surface R_1' relative à une droite r' s'appuyant sur d_1. La droite d_1 est simple pour R_1'. A une droite g_1 de R_1' correspond une droite g_2 de G_2, bien déterminée si g_1 ne coïncide pas avec une droite-base de $|\Phi_1|$, ce que nous supposerons. La droite g_1 est commune, dans ce cas, à ∞^1 surfaces de $|\Phi_1|$ formant un faisceau $||\Phi_1|$ et la droite g_2 est commune à ∞^1 surfaces de $|\Phi_2|$ formant un faisceau $||\Phi_2|$. Lorsque la droite g_1 varie sur R_1' et se rapproche indéfiniment de d_1, le faisceau $||\Phi_1|$ varie et tend vers une limite bien déterminée, le faisceau des surfaces Φ_1 touchant la surface R_1' le long de d_1. La droite g_2 correspondant à g_1 varie également et a pour limite une droite $\overline{g_2}$ déterminée par le faisceau de $|\Phi_2|$ correspondant au faisceau limite de $||\Phi_1|$. Ce faisceau de $|\Phi_2|$, étant déterminé par une projectivité, est déterminé sans aucune exception. Nous pouvons exprimer ce qui vient d'être établi en disant qu'à la droite de R'_1, infiniment voisine de d_1, dans le domaine du premier ordre de d_1, correspond une droite de G_2 bien déterminée.

Remarquons qu'il y a ∞^2 droites s'appuyant sur d_1 et touchant R'_1 au point d'appui. Toutes les surfaces R_1 relatives à ces droites contiennent la génératrice de R'_1 infiniment voisine de d_1, c'est-à-dire que toutes ces surfaces touchent R'_1 le long de d_1. On en conclut que les ∞^3 surfaces R_1 relatives aux droites r s'appuyant sur d_1 se partagent en ∞^1 familles de ∞^2 surfaces, les surfaces d'une famille se touchant le long de d_1. Par conséquent, lorsque la surface R'_1, passant par d_1, occupe les ∞^3 positions possibles, la droite $\overline{g_2}$ occupe ∞^1 positions. Nous distinguerons deux cas :

1° Les ∞^1 positions de $\overline{g_2}$ sont infiniment voisines d'une droite-base d_2 de $|\Phi_2|$;

2° Les ∞^1 positions de $\overline{g_2}$ forment une surface (d_1) de G_2.

Dans le premier cas, nous dirons que d_1 est une *droite fondamentale apparente de* G_1 *pour* θ; dans le second, qu'elle est une *droite fondamentale proprement dite de* G_1 *pour* θ.

4. — Élimination des droites fondamentales apparentes. — Si nous considérons un second réseau de degré un $|\Phi'_1|$ de G_1, la correspondance θ fera correspondre aux surfaces de ce réseau des surfaces Φ'_2 de G_2 formant également un réseau de degré un $|\Phi'_2|$. La correspondance θ pourra évidemment être définie en partant de ces nouveaux réseaux $|\Phi'_1|$, $|\Phi'_2|$, pourvu que la projectivité à établir entre les surfaces de ces réseaux le soit convenablement. Par un choix convenable de ces nouveaux réseaux, nous allons montrer que les droites fondamentales apparentes se conduisent comme des droites quelconques des congruences. D'une manière précise, nous montrerons que la droite d_2 correspond à la droite d_1.

Considérons la surface R_2 de G_2 relative à une droite r. Il lui correspond, par θ, une surface S_1 de G_1.

Si d_1 est une droite de G_1 fondamentale proprement dite pour θ, la droite r rencontre nécessairement la surface (d_1) et la surface S_1 passe par d_1.

Si d_1 est une droite fondamentale apparente pour θ, la surface S_1 ne passera par d_1 que si la droite r s'appuie sur d_2.

On voit donc que les surfaces S_1 que θ fait correspondre aux surfaces R_2 passent toujours par les droites fondamentales proprement dites de G_1 pour θ et qu'elles ne passent pas, en général, par les droites fondamentales apparentes.

Cela étant, considérons les surfaces R_2 de G_2 relatives aux droites d'un plan π ne contenant qu'un nombre fini de points singuliers de G_2 et ne passant par aucune droite telle que d_2. Soient R'_2 ces surfaces, S'_1 les surfaces que θ leur fait correspondre dans G_1. Les surfaces R'_2 constituent un réseau de degré un ayant, comme droites-base les n_2 droites de G_2 situées dans π. Les surfaces S'_1 constituent également un réseau de degré un ayant comme droites-base les droites fondamentales proprement dites de G_1 pour θ et les n_2 droites que θ fait correspondre aux droites de G_2 situées dans π.

Ainsi que nous l'avons dit, nous pouvons définir θ au moyen d'une projectivité, convenablement choisie, entre les réseaux $|S'_1|$, $|R'_2|$. Actuellement, les droites fondamentales apparentes ne jouent plus aucun rôle particulier; elles se comportent donc, vis-à-vis de θ, comme des droites ordinaires des congruences G_1, G_2.

Remarquons qu'en définissant θ au moyen de $|S'_1|$, $|R'_2|$, les n_2 droites de G_2 situées dans π et les n_2 droites qui leur correspondent dans G_1 sont des droites fondamentales apparentes pour θ.

5. — Définition définitive des droites fondamentales pour θ. — La correspondance θ étant définie au moyen d'une projectivité entre deux réseaux de degré un $|\Phi_1|$ de G_1, $|\Phi_2|$ de G_2, à une

surface R_1 de G_1 (ou R_2 de G_2) correspond une surface S_2 de G_2 (ou S_1 de G_1) passant par toutes les droites fondamentales proprement de G_2 (ou G_1).

Deux surfaces telles que S_1 se rencontrent, en dehors des droites fondamentales proprement dites, en $n_2 + 1$ droites variables avec les surfaces choisies.

Nous dirons qu'une droite de G_1 est *fondamentale d'ordre* h *pour* θ, si elle est multiple d'ordre h pour toutes les surfaces S_1 que θ fait correspondre aux surfaces R_2 de G_2.

Comme nous l'avons vu plus haut, aux droites infiniment voisines d'une droite d_1 fondamentale de G_1, θ fait correspondre les droites d'une surface (d_1) de G_2. Soit h' l'ordre de cette surface; une droite r la rencontre donc en h' points et la surface R_2 relative à r en h' droites de G_2 (en dehors des courbes singulières de cette congruence). Il en résulte que la surface S_1 correspondant à R_2 contient h' droites infiniment voisines de d_1, c'est-à-dire qu'elle passe h' fois par d_1 [les droites communes à (d_1) et R_2 étant comptées avec leurs multiplicités pour (d_1)]. On a donc $h' = h$.

La surface (d_1), d'ordre h, sera appelée *surface fondamentale* correspondant à la droite fondamentale d_1, pour θ.

On a des définitions analogues pour G_2.

6. — Définition d'une correspondance birationnelle θ_1 entre deux plans. — Considérons deux plans π_1, π_2 satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Le plan π_1 (ou π_2) ne rencontre les lignes singulières de G_1 (ou de G_2) qu'en un nombre fini de points;

2° Un point singulier de G_1 (ou de G_2) situé dans π_1 (ou π_2) n'est pas situé sur une droite fondamentale pour θ. (Il en résulte que π_1, π_2 ne contiennent pas de droite fondamentale pour θ);

3° Aucun des rayons de G_1 situé dans π_1 ne correspond à un rayon de G_2 situé dans π_2.

Dans ces conditions, nous dirons que deux points de π_1, π_2 se correspondent dans la correspondance θ_1 s'ils sont situés sur des rayons de G_1, G_2 respectivement, se correspondant dans θ. En d'autres termes, deux rayons correspondants de G_1, G_2 rencontrent respectivement π_1, π_2 en des points se correspondant dans θ_1.

La correspondance θ_1 est évidemment birationnelle ; c'est en quelque sorte une image de θ.

A une droite r de π_1, θ_1 fait correspondre une courbe section par π_2 de la surface S_2 que θ fait correspondre à la surface R_1 relative à r. De même, à une droite de π_2 correspond la section par π_1 d'une surface S_1. Ces deux courbes, dans π_1 et dans π_2, doivent avoir le même ordre; donc il en est de même des surfaces S_1, S_2.

Les surfaces S_1, S_2 *ont le même ordre* n.

Les sections par π_1 des surfaces S_1 correspondant aux surfaces R_2 relatives aux droites de π_2 doivent former un réseau de degré un et les points-base de ce réseau sont les points de π_1 fondamentaux pour θ_1. Ces points se répartissent en trois catégories :

a) Les points de π_1 situés sur les droites fondamentales de G_1 ;

b) Les points de π_1 singuliers pour la congruence G_1 ;

c) Les points de π_1 situés sur les droites de G_1 que θ fait correspondre aux n_2 droites de G_2 situées dans π_2.

Les courbes fondamentales correspondantes de π_2 sont respectivement :

a) Les sections par π_2 des surfaces fondamentales de G_2 pour θ;

b) Les sections par π_2 des surfaces de G_2 que θ fait correspondre aux droites de G_1 passant par les points singuliers de cette congruence situés dans π_1 ;

c) Les droites de G_2 situées dans π_2.

On détermine de même les points fondamentaux de π_2 et les courbes fondamentales de π_1 pour θ_1.

7. — Rappel des propriétés des transformations birationnelles planes (*). — 1° Les courbes fondamentales ont leurs points multiples en des points fontamentaux;

2° Les courbes fondamentales ne se coupent qu'en des points fondamentaux;

3° Les courbes d'un plan correspondant aux droites de l'autre ne rencontrent des courbes fondamentales qu'en des points fondamentaux;

4° Si P_1, P_2 sont deux points fondamentaux situés, l'un dans π_1, l'autre dans π_2, la multiplicité de P_1 pour la courbe fondamentale correspondant à P_2 est égale à la multiplicité de P_2 pour la courbe fondamentale correspondant à P_1;

5° Le nombre total des branches des courbes fondamentales qui passent par un point fondamental est égal au triple de l'ordre de dernier, diminué d'une unité;

6° Le nombre des points fondamentaux dans les deux plans est le même.

8. — Propriétés des droites et des surfaces fondamentales pour θ. — D'après le choix des plans π_1, π_2, une droite de G_1 (ou G_2) située dans π_1 (ou π_2) ne passe par aucun des points de ces plans situés sur des droites fondamentales pour θ. Par conséquent, en vertu de la quatrième propriété rappelée ci-dessus, les courbes fondamentales pour θ_1 du plan π_1 (ou π_2) de la catégorie *a*) ne passent pas par les points fondamentaux de catégorie *c*). En vertu de cette remarque, les trois premières propriétés rappelées se traduisent, pour la correspondance θ, dans les théorèmes suivants :

I. — *Les surfaces fondamentales de θ ne peuvent avoir, en dehors des courbes singulières de la congruence à laquelle*

(*) Voir au sujet de ces transformations : Cremona, *Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane*. (Memorie della R. Accad. di Bologna, 1865 (2), V, pp. 3-35.) (Second *Mémoire*); Clebsch, *Leçons sur la Géométrie*, rédigées par Lindeman. Traduction par A. Benoist, t. II, pp. 188-219. (Paris, Gauthier-Villars, 1880); Severi, *Lezioni di Geometria algebrica*, chap. II. (Padova, Draghi, 1908.)

elles appartiennent, d'autres droites multiples que les droites fondamentales.

II. — *Les surfaces fondamentales de* θ *ne se rencontrent, en dehors des courbes singulières de la congruence à laquelle elles appartiennent, qu'en des droites fondamentales.*

III. — *Les surfaces* S_1 (*ou* S_2) *ne rencontrent les surfaces de* G_1 (*ou de* G_2) *fondamentales pour* θ, *en dehors des courbes singulières de* G_1 (*ou de* G_2), *qu'en des droites fondamentales.*

D'autre part, la sixième propriété se traduit par ce théorème :

IV. — *Le nombre des droites fondamentales pour* θ *dans une congruence, augmenté des ordres des courbes singulières de cette congruence et diminué de sa classe, est une expression indépendante de la congruence choisie.*

Enfin, la quatrième propriété donne :

V. — *La multiplicité d'une droite fondamentale* d_1 *de* G_1 *pour la surface fondamentale* (d_2) *correspondant à une droite fondamentale* d_2 *de* G_2, *est égale à la multiplicité de* d_2 *pour la surface fondamentale* (d_1) *correspondant à* d_1.

9. — Surfaces transformées, par θ, des points singuliers de G_1 et G_2. — Aux droites de G_1 (ou de G_2) passant par un point singulier P_1 de G_1 (ou P_2 de G_2), θ fait correspondre les droites d'une surface de G_2 (ou de G_1). Nous appellerons cette surface la *transformée par* θ *du point singulier* P_1 (ou P_2) et nous la représenterons par (P_1) [ou (P_2)].

Si le point P_1 est situé dans le plan π_1, il est fondamental (de la seconde catégorie) pour θ_1 et la courbe fondamentale correspondante dans π_2 est, comme nous l'avons dit, la section de (P_1) pour ce plan. Moyennant cette observation, on déduit des propriétés énoncées des transformations birationnelles planes les théorèmes suivants :

VI. — *La multiplicité d'un point singulier* P_1 *de* G_1 *pour la transformée* (P_2) *par* θ *d'un point singulier* P_2 *de* G_2 *est égale à la multiplicité de* P_2 *pour la transformée* (P_1) *par* θ *de* P_1.

VII. — *La multiplicité d'une droite fondamentale* d_1 *de* G_1 *pour la transformée* (P_2) *par* θ *d'un point singulier* P_2 *de* G_2

est égale à la multiplicité de P_2 *pour la surface fondamentale* (d_1) *correspondant à* d_1.

VIII. — *Le nombre des nappes des surfaces de* G_1 (*ou de* G_2) *fondamentales, passant par une droite fondamentale* d, *augmenté des multiplicités de* d *pour les surfaces transformées des points singuliers de* G_2 (*ou de* G_1) *situés dans un plan, est égal au triple de l'ordre de la droite fondamentale* d, *diminué d'une unité.*

Soient C_1 une courbe singulière de G_1, P_1 un point d'intersection de C_1 et de π_1, η le nombre de droites de G_1, situées dans π_1 et passant par P_1. Parmi les branches des courbes fondamentales de π_1 pour θ_1, passant par le point fondamental P_1, se trouvent les η droites de G_1 passant par ce point. Par conséquent, le nombre des branches restantes est égal, d'après la cinquième propriété des transformations planes, au triple de l'ordre de (P_1) diminué de $\eta + 1$.

IX. — *Le nombre des nappes des surfaces fondamentales de* G_1 (*ou* G_2) *passant par une courbe singulière de cette congruence, augmenté des multiplicités de cette courbe pour les transformées par* θ *des points singuliers de* G_2 (*ou de* G_1) *situés dans un plan, est égal au triple de l'ordre de la surface transformée par* θ *d'un point de cette courbe, diminué de* $\eta + 1$, η *représentant l'ordre du cône formé par les droites de* G_1 (*ou* G_2) *passant par un point de cette courbe.*

10. — Forme définitive de la définition de la correspondance θ. — Dans la suite de ce travail, nous nous baserons sur le théorème suivant :

La correspondance θ *est déterminée lorsqu'on se donne :*

1° *L'ordre des surfaces de* G_1 *qui correspondent aux surfaces* R_2 *de* G_2, *et la multiplicité des courbes singulières de* G_1 *pour ces surfaces* (*) ;

(*) Ce dernier point peut être superflu. C'est ce qui se présente si G_1 est constituée par les cordes d'une cubique gauche, par exemple. Dans ce cas, l'ordre d'une surface de G_1 est égal au double de la multiplicité de la courbe singulière.

2° *Les droites fondamentales de* G_1 *et les surfaces fondamentales correspondantes de* G_2.

Dans le 2° nous voulons dire que les surfaces fondamentales de G_2 sont complètement connues; on connaît donc leurs ordres, les multiplicités le long des courbes singulières de G_2 et leurs droites multiples. Il résulte de ce qui précède que ces éléments ne peuvent être fixés arbitrairement.

D'après l'énoncé précédent, les surfaces S_1 seront entièrement connues, puisque l'on connaîtra les multiplicités des droites fondamentales de G_1 pour ces surfaces par le 2°. Pour retrouver la première définition de θ, il suffira de considérer le réseau de degré un des surfaces R_2 de G_2 relatives aux droites d'un plan et le réseau des surfaces S_1 correspondantes.

Nous ne pousserons pas plus avant l'étude de la correspondance θ sans spécifier la nature des lignes singulières des congruences G_1, G_2. Dans ces différents cas particuliers, cette étude sera reprise plus loin.

CHAPITRE II.

Définition et propriétés générales des transformations de Jonquières de l'espace.

11. — Définition. — Considérons, dans un espace linéaire à trois dimensions :

1° Deux faisceaux de plans homographiques (a_1), (a_2) ayant respectivement pour axes les droites a_1, a_2;

2° Deux congruences linéaires de droites G_1, G_2, respectivement de classes n_1, n_2, entre les droites desquelles existe une correspondance birationnelle θ.

Dans tout le cours de ce travail, nous supposerons que :

La droite a_1 (ou a_2) ne rencontre ni les courbes singulières de G_1 (ou de G_2), ni les droites fondamentales pour θ de G_1 (ou G_2).

Pour simplifier le langage, nous appellerons Σ_1 l'espace à trois dimensions contenant (a_1) et G_1, et Σ_2 l'espace (superposé à Σ_1) contenant (a_2) et G_2.

Soit P_1 un point de Σ_1 non situé sur la droite a_1 ni sur une courbe singulière de G_1 ou sur une droite de G_1 fondamentale pour θ. Par P_1 passent un plan α_1 de (a_1) et un rayon g_1 de G_1. Soient α_2 le plan de (a_2) qui correspond à α_1, g_2 le rayon de G_2 qui correspond à g_1 par θ. En général, ce plan α_2 et cette droite g_2 se rencontrent en un seul point P_2 de Σ_2.

Inversement, à un point P_2 de Σ_2 correspond en général un seul point P_1 de Σ_1.

La transformation birationnelle T liant Σ_1 et Σ_2, ainsi définie sera appelée *transformation de Jonquières* T, parce qu'elle transforme un faisceau de plans (a_1) en un faisceau de plans (a_2).

12. — Les surfaces transformées des plans. — Soit π un plan de Σ_1. T fait correspondre à ce plan une surface F_2 de Σ_2 dont nous allons déterminer l'ordre.

A cet effet, considérons une droite x de Σ_2, support de deux ponctuelles (X_1), (X_2). Entre les points de ces ponctuelles, nous établissons la correspondance suivante : deux points X_1, X_2 se correspondent lorsque le plan du faisceau (a_2) passant par X_1 et le rayon de G_2 passant par X_2 ont respectivement pour correspondants un plan du faisceau (a_1) et un rayon de G_1 se rencontrant en un point du plan π.

A un point X_1 correspondent n points de (X_2). En effet, le plan de (a_1) correspondant au plan de (a_2) passant par X_1 rencontre π en une droite r; la surface R_1 de G_1 relative à cette droite r a pour correspondante, par θ dans G_2, une surface S_2 d'ordre n. Celle-ci rencontre la droite x en n points X_2.

Inversement, à un point X_2 correspond un point de (X_1).

Les ponctuelles (X_1), (X_2) sont donc liées par une correspondance $(1, n)$. D'après le principe de Chasles, il y a $n + 1$

coïncidences. Une de ces coïncidences est précisément un point de la surface F_2; donc celle-ci rencontre la droite x en $n+1$ points et est d'ordre $n+1$.

De même, les surfaces S_1 ayant le même ordre n que les surfaces S_2, à un plan de Σ_2 correspond, dans Σ_1, une surface F_1 d'ordre $n+1$.

La transformation T *fait correspondre à un plan de* Σ_1 *(ou de* Σ_2*) une surface* F_2 *(ou* F_1*) d'ordre* $\mathrm{n}+1$, *de* Σ_2 *(ou de* Σ_1*).*

13. — Aux ∞^3 plans de Σ_1 correspondent ∞^3 surfaces F_2 de Σ_2 formant un système linéaire de degré un $|F_2|$. Nous allons établir une relation fonctionnelle qui nous fournira, en même temps qu'une nouvelle démonstration du théorème précédent, l'indication des multiplicités des surfaces F_2 le long des courbes singulières de G_2, des droites de G_2 fondamentales pour θ et de la droite a_2.

Reprenons le plan π de Σ_1 et la surface F_2 que T lui fait correspondre dans Σ_2. Considérons les droites déterminées sur π par les plans de (a_1). A une r de ces droites, T fait correspondre la courbe-intersection :

1° du plan α_2 de (a_2) correspondant au plan de (a_1) passant par cette droite r;

2° de la surface S_2 que θ fait correspondre à la surface R_1 de G_1 relative à r.

L'ensemble de ces courbes forme la surface F_2 transformée de π.

Les surfaces S_2 dont il vient d'être question engendrent un faisceau projectif au faisceau (a_2). F_2 est donc engendrée par les intersections de deux faisceaux projectifs, et l'on a, par suite,

$$F_2 \equiv S_2 + \alpha_2.$$

On déduit tout d'abord de cette relation que l'ordre de F_2 est égal à celui, n, de S_2 augmenté de celui, 1, de α_2.

On en déduit ensuite que la multiplicité pour F_2 d'un point commun à toutes les surfaces S_2 du faisceau considéré est égale à la multiplicité de ce point pour ces surfaces S_2. De même pour les points communs à tous les plans α_2, c'est-à-dire pour les points de la droite a_2.

De la même manière, on établit la relation fonctionnelle

$$F_1 \equiv S_1 + \alpha_1,$$

et l'on en déduit des conséquences analogues.

Les surfaces F_1 (*ou* F_2) *passent simplement par la droite* a_1 (*ou* a_2) *et autant de fois par les courbes singulières et les droites fondamentales pour* θ *de* G_1 (*ou de* G_2) *que les surfaces* S_1 (*ou* S_2).

14. — Courbes-base des systèmes linéaires $|F_1|$, $|F_2|$. — Nous venons de démontrer que les surfaces du système $|F_1|$, par exemple, passent par a_1, par les courbes singulières de G_1 et les droites de G_1 fondamentales pour θ. Soit, s'il est possible, un point P non situé sur ces courbes, appartenant à toutes les surfaces de $|F_1|$.

La transformation T ne peut faire correspondre un point bien déterminé de Σ_2 à P; il faut donc qu'il y ait indétermination dans la construction de ce point. Désignons par α_2 le plan de (a_2) correspondant au plan α_1 de (a_1) passant par P, par g_2 le rayon de G_2 que θ fait correspondre au rayon g_1 de G_1 passant par P. Pour que le transformé de P soit indéterminé, il faut que

1° Le plan α_2 soit indéterminé, ou que

2° La droite g_2 soit indéterminée, ou que

3° La droite g_2 soit située dans le plan α_2.

Dans le premier cas, α_1 doit également être indéterminé, ce qui est impossible, puisque P ne se trouve pas sur a_1. Dans le second cas, P devrait être un point singulier de G_1 ou un point d'une droite fondamentale de G_1 pour θ, ce qui est exclu par hypothèse.

Dans le troisième cas, g_2 s'appuie sur a_2 et engendre donc la surface R_2, d'ordre $n_2 + 1$, relative à a_2. Nous représenterons cette surface par (γ_1). Lorsque g_2 décrit (γ_1), P décrit une courbe γ_1 commune à toutes les surfaces F_1.

Considérons un plan π de Σ_1. A chaque point commun à π et à γ_1 correspond une droite g_2 de (γ_1) située sur la surface F_2 transformée de π. L'ordre de γ_1 est donc égal au nombre de droites de G_2 appartenant à une surface F_2, c'est-à-dire au nombre de points où la surface (γ_1) rencontre une section plane d'une surface F_2, en dehors de a_2 et des courbes singulières de G_2. Nous démontrerons plus loin, dans chaque cas particulier, que la courbe γ_1 a l'ordre $n + n_2$.

De ce qui précède, il résulte que la courbe γ_1 complète l'ensemble des courbes-base du système $|F_1|$.

On trouve de même une courbe γ_2, d'ordre $n + n_1$, de Σ_2, complétant l'ensemble des courbes-base de $|F_2|$.

La base du système linéaire de degré un, $|F_1|$ (*ou* $|F_2|$), *est constituée par la droite* a_1 (*ou* a_2), *les courbes singulières de* G_1 (*ou* G_2), *les droites de* G_1 (*ou* G_2) *fondamentales pour* θ, *une courbe* γ_1 (*ou* γ_2) *d'ordre* $n + n_2$ (*ou* $n + n_1$).

15. — Courbes et surfaces fondamentales pour la transformation T. — On sait que Cremona (*) a appelé *courbe fondamentale* de la tranformation T_1 dans Σ_1, par exemple, une courbe commune à toutes les surfaces F_1. Ce géomètre a, de plus, démontré qu'à un point d'une courbe fondamentale multiple d'ordre h pour les surfaces F_1 correspond une courbe d'ordre h, rationnelle, de Σ_2 et que le lieu de ces courbes est une surface faisant partie de la jacobienne du système $|F_2|$. Nous appellerons cette surface la *surface fondamentale correspondant* à la courbe fondamentale envisagée.

Nous allons examiner successivement les différentes courbes

(*) *Sulle trasformazioni...* (Annali di Matematica...), *loc. cit.* Dans le texte, nous appliquons directement les résultats de Cremona au cas qui nous occupe.

fondamentales de Σ_1 pour T (c'est-à-dire les courbes-base de $|F_1|$).

16. — La droite fondamentale a_1. — Soit P un point de la droite a_1; si nous effectuons les constructions pour déterminer le correspondant de P dans Σ_2, nous constatons que le plan du faisceau (a_2) est indéterminé. Par suite, à un point de a_1 correspond la droite de G_2 que θ fait correspondre à la droite de G_1 passant par le point considéré. La surface fondamentale correspondant à a_1 est donc la surface S_2 que θ fait correspondre à la surface R_1 relative à a_1. Cette surface sera représentée par (a_1); elle est, comme on sait, d'ordre n.

17. — Courbes fondamentales singulières de G_1. — Soient C_1 une courbe singulière de G_1, P un point de cette courbe. Au point P, θ fait correspondre une surface (P) d'un certain ordre ν_1.

La courbe-intersection de la surface (P) et du plan α_2 correspondant dans (α_2) au plan de (a_1) passant par P_1 est le lieu des points correspondant à P.

Lorsque P décrit la courbe C_1, cette courbe engendre la surface fondamentale correspondant à C_1, surface que nous représenterons par (C_1). Pour évaluer l'ordre de cette surface, appelons m_1 l'ordre de C_1 et supposons que les droites de G_1 s'appuient en ξ points sur C_1 ($\xi = 1$ ou 2). Alors, dans un plan passant par a_2 se trouvent m_1 courbes d'ordre ν_1, appartenant à (C_1); ce sont les courbes qui correspondent aux points de C_1 situés dans le plan correspondant de (a_1). D'autre part, à un point Q de a_2 correspond une droite de G_1 s'appuyant en ξ points sur C_1, et les courbes correspondant à ces ξ points passent par Q. La droite a_2 est donc multiple d'ordre ξ pour (C_1), et cette surface est, par suite, d'ordre $m_1\nu_1 + \xi$.

D'après le résultat de Cremona, rappelé plus haut, C_1 doit être multiple d'ordre ν_1 pour les surfaces F_1. On remarquera que ce fait résulte également de nos développements précédents, les surfaces S_1 passant ν_1 fois par C_1.

18. — Droite de G_1, fondamentale pour θ et pour T. — Si d_1 est une droite de G_1 fondamentale pour θ, elle l'est aussi pour T. Dans θ, il correspond à d_1 une surface fondamentale (d_1) de G_2.

A un point P de d_1, T fait correspondre la courbe-section de (d_1) par le plan de (a_2) correspondant au plan de (a_1) passant par P. Lorsque P décrit d_1, cette courbe décrit la surface (d_1). On voit donc que θ et T font correspondre à d_1 la même surface fondamentale (d_1).

19. — La courbe fondamentale γ_1. — A un point de γ_1 correspond dans Σ_2 une droite de G_2 s'appuyant sur a_2, ainsi qu'il a été vu plus haut. On en conclut que les surfaces F_1 passent simplement par la courbe γ_1.

Aux différents points de γ_1 correspondent les points de la surface (γ_1), d'ordre $n_2 + 1$, rencontrée plus haut.

En résumé, *l'ensemble des surfaces fondamentales de* Σ_2 *est constitué par*

1° *Une surface* (a_1), *d'ordre* n, *qui est une surface* S_2 *particulière.*

2° *Une ou deux surfaces telles que* (C_1), *correspondant à une courbe singulière* C_1 *de* G_1. *La surface* (C_1) *est d'ordre* $m_1\nu_1 + \xi$, m_1 *étant l'ordre de* C_1; ν_1 *l'ordre de multiplicité de* C_1 *pour les surfaces* S_1; ξ *le nombre des points d'appui des droites de* G_1 *sur* C_1.

3° *Un certain nombre de surfaces* (d_1) *fondamentales pour* θ *et* T.

4° *Une surface* (γ_1) *d'ordre* $n_2 + 1$, *qui est la surface* R_2 *relative à* a_2.

On vérifiera dans chaque cas particulier que l'ensemble de ces surfaces constitue bien la jacobienne (d'ordre $4n$) du système $|F_2|$.

Des résultats analogues sont obtenus par la considération des surfaces fondamentales de Σ_1.

20. — Points communs aux courbes fondamentales. — A un point commun à deux courbes fondamentales correspond une courbe commune aux surfaces fondamentales correspondantes. Cette propriété va nous permettre de déterminer les nombres de points d'appui de la courbe γ_1 sur les autres courbes fondamentales Σ_1.

A cet effet, rappelons que la surface (γ_1) est le lieu des droites de G_2 rencontrant a_2. Chaque fois donc qu'il y aura, sur une surface fondamentale de Σ_2, une droite de G_2 s'appuyant sur a_2, il y aura sur la courbe fondamentale correspondante de Σ_1 un point appartenant à γ_1.

La surface (a_1) étant une surface de G_2, d'ordre n, il y a n de ses droites s'appuyant sur a_2; donc γ_1 rencontre a_1 en n points.

Une surface (d_1) correspondant à une droite fondamentale pour θ, d_1 de G_1, est d'ordre h; c'est une surface de G_2; donc il y a h de ses droites s'appuyant sur a_2. Sur une droite fondamentale d'ordre h, γ_1 s'appuie donc en h points.

Le nombre des points d'appui de γ_1 sur la courbe C_1 est égal au nombre de points en lesquels la surface (γ_1) rencontre une section plane de la surface (C_1), en dehors des courbes singulières de G_2 et de la droite a_2. Nous établirons plus loin, dans chaque cas où sera spécifiée la nature des congruences G_1, G_2, que ce nombre est égal à $m_1\nu_1 + n_2\xi$.

La courbe γ_1, *d'ordre* $n + n_2$, *s'appuie en* n *points sur la droite* a_1, *en* h *points sur une droite de* G_1 *fondamentale d'ordre* h *pour* θ *et pour* T, *et en* $m_1\nu_1 + n_2\xi$ *points sur une courbe singulière de* G_1, *d'ordre* m_1, *multiple d'ordre* ν_1 *pour les surfaces* S_1 *et rencontrée en* ξ *points par les droites de* G_1.

On obtient un théorème analogue relatif à la courbe γ_2.

21. — Courbes transformées des droites de l'espace. — A une droite r de Σ_2, T fait correspondre une courbe φ_1, rationnelle,

dont l'ordre est égal à celui des surfaces F_2. En effet, à un point commun à φ_1 et à un plan de Σ_1, T fait correspondre un point commun à r et à la surface F_2 transformée du plan considéré. La courbe φ_1 est donc d'ordre $n+1$. Il en est de même de la courbe φ_2 que T fait correspondre, dans Σ_2, à une droite de Σ_1.

Les courbes φ_1, correspondant à l'ensemble des droites de Σ_2, sont en nombre ∞^4. Ces courbes s'appuient sur les courbes fondamentales de Σ_1. Pour évaluer le nombre de ces points d'appui, il suffit de remarquer qu'à un point commun à une droite r de Σ_2 et à une surface fondamentale de cet espace correspond un point commun à la courbe φ_1 correspondant à la droite et à la courbe fondamentale de Σ_1 à laquelle correspond la surface fondamentale envisagée. On a donc le théorème suivant :

Aux droites de Σ_2, T *fait correspondre des courbes rationnelles d'ordre* $n+1$, *s'appuyant en* n *points sur la droite* a_1, *en* h *points sur une droite de* G_1 *fondamentale d'ordre* h *pour* θ, *en* n_2+1 *points sur la courbe* γ_1 *et en* $m_1\nu_1+\xi$ *points sur une courbe d'ordre* m_1, *singulière de* G_1, *multiple d'ordre* ν_1 *pour les surfaces* S_1 *et sur laquelle les droites de* G_1 *s'appuient en* ξ *points.*

On obtient un résultat analogue pour les courbes φ_2 de Σ_2.

22. — Classification des transformations T. — Nous considérerons, comme congruences linéaires de droites, les figures suivantes :

1° Congruence des bisécantes d'une cubique gauche;

2° Congruence formée par les droites s'appuyant sur une droite et sur une courbe d'ordre m s'appuyant elle-même en $m-1$ points sur la droite;

3° Congruence formée par les rayons de ∞^1 faisceaux dont les plans passent par une droite et dont les sommets se trouvent sur cette droite, les sommets des faisceaux et leurs plans étant liés par une correspondance $(1, m)$.

On sait que cette troisième congruence est un cas limite de la deuxième, correspondant au fait que la courbe d'ordre m se réduit à m droites infiniment voisines de la droite singulière.

Nous négligeons, comme nous l'avons déjà dit tout au début, la congruence linéaire formée par les droites passant par un point.

Nous représenterons par T_{ik} la transformation T pour laquelle les congruences G_1, G_2 sont respectivement des types i, k. Nous les étudierons avec quelques détails dans les chapitres suivants.

Nous désignerons également par θ_{ik} la correspondance θ entre deux congruences G_1, G_2 appartenant respectivement aux types i, k.

CHAPITRE III.

Les transformations T_{11}.

§ 1. — *Étude de la correspondance* θ_{11}.

23. — Rappel de quelques propriétés des surfaces formées par les bisécantes d'une cubique gauche. — Nous commencerons par établir trois lemmes sur les surfaces engendrées par les bisécantes d'une cubique gauche C. Soit F une telle surface.

I. — *L'ordre de la surface* F *est pair et égal au double de la multiplicité de* C *pour cette surface.*

En effet, une bisécante de C, n'appartenant pas à F, ne peut rencontrer cette surface en dehors de C, sans quoi le système des bisécantes de C ne constituerait pas une congruence linéaire.

II. — *Deux surfaces* F, F′, *irréductibles, engendrées par les bisécantes de* C, *ne peuvent se toucher le long de cette courbe.*

Supposons que deux nappes de F, F′ se touchent en un point P de C. La courbe commune à ces deux nappes se compose de la courbe C et d'une génératrice commune des deux surfaces F, F′, c'est-à-dire d'une bisécante de C. Si les deux nappes se touchaient en tout point de C, elles seraient donc confondues et les surfaces F, F′ auraient une partie commune, ce qui est contre l'hypothèse.

III. — *L'ordre de multiplicité d'une bisécante de* C, *pour une surface* F *d'ordre* 2h, *ne peut excéder* h — 1, *si* h *est supérieur à l'unité.*

Soient d une bisécante de C, l -uple pour F et d' une bisécante de C, simple pour F. Une droite s'appuyant sur C, d et d' rencontrent F en $h + l + 1$ points. Si F ne coïncide pas avec la quadrique lieu de pareilles droites (auquel cas on aurait $h = 1$), on doit avoir $h + l + 1 \leq 2h$, c'est-à-dire $l \leq h - 1$.

24. — Définition de la correspondance θ_{11}. — Soient C_1, C_2 deux cubiques gauches dont les bisécantes constituent respectivement les congruences linéaires G_1, G_2. Les classes de ces congruences sont donc $n_1 = n_2 = 3$.

A une surface R_1 (ou R_2) de G_1 (ou de G_2), d'ordre 4, θ_{11} fait correspondre une surface S_2 (ou S_1) d'ordre n passant nécessairement $\frac{n}{2}$ fois par C_2 (ou C_1). n est donc pair.

Considérons deux points P, P′ de C_2. La surface R_2 relative à la droite PP′ se scinde en deux cônes du second degré, projetant C_2 de P et P′. La surface S_1 correspondante se scinde en deux surfaces (P), (P′), d'ordre $\frac{n}{2}$, qui sont les transformées par θ_{11} des points P, P′. Les surfaces (P), (P′) passent nécessairement $\frac{n}{4}$ fois par C_1; donc n est multiple de 4; nous poserons $n = 4\nu$.

Les surfaces fondamentales pour θ_{11} des congruences G_1, G_2 sont nécessairement d'ordres pairs; nous supposerons que G_1 possède x_{11} droites fondamentales d'ordre 2, x_{12} droites fondamentales d'ordre 4, ..., $x_{1,\nu-1}$ droites fondamentales d'ordre $2(\nu - 1)$. Il ne peut exister de droites fondamentales d'ordre supérieur.

Nous définirons la correspondance θ_{11} par les conditions suivantes :

1° Les surfaces S_1, de G_1, qui correspondent aux surfaces R_2, d'ordre 4, de G_2, sont d'ordre 4ν et passent 2ν fois par C_1 ;

2° La congruence G_1 possède x_{11} droites fondamentales d'ordre 2, ..., $x_{1,\nu-1}$ droites fondamentales d'ordre $2(\nu-1)$.

Le premier point de cette définition peut être simplifié.

Considérons les différentes surfaces R_2 relatives aux droites passant par un point P de C_2. Elles se décomposent en un cône projetant C_2 de P et en les ∞^2 quadriques Q_2 circonscrites à C_2. Au cône projetant C_2 de P correspond une surface (P) d'ordre 2ν, passant ν fois par C_1 et h fois par une droite de G_1, fondamentale pour θ_{11} d'ordre $2h$. Par suite, le premier point peut être remplacé par cette propriété.

Aux quadriques circonscrites à G_2 *correspondent des surfaces d'ordre* 2ν *passant* ν *fois par* C_1 *et possédant* x_{11} *droites de* G_1 *simples,* x_{12} *doubles,* ..., $x_{1,\nu-1}$ $(\nu-1)$*-uples.*

25. — Relations entre les droites fondamentales de G_1, G_2. — Supposons que G_2 possède x_{21} droites fondamentales d'ordre 2, x_{22} droites fondamentales d'ordre 4, ..., $x_{2,\nu-1}$ droites fondamentales d'ordre $2(\nu-1)$. Nous devons avoir, C_1, C_2 ayant le même ordre et n_1, n_2 étant égaux,

$$x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1,\nu-1}=x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2,\nu-1}. \qquad (1)$$

Une quadrique étant une réglée rationnelle, la surface de G_1 que θ_{11} fait correspondre à une quadrique circonscrite à C_2 est rationnelle; donc une de ses sections plane est rationnelle. Cela donne

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\nu-1} i(i-1)x_{1i}+\frac{3}{2}\nu(\nu-1)=\frac{1}{2}(2\nu-1)(2\nu-2).$$

D'autre part, deux quadriques circonscrites à C_2 ont encore en commun, outre C_2, une bisécante de cette courbe ; par conséquent, les surfaces d'ordre 2ν de G_1 que θ_{11} fait correspondre à ces quadriques n'ont en commun, en dehors de C_1 et des droites fondamentales, qu'une droite de G_1. Ces deux surfaces ne pouvant se toucher le long de C_1, nous devons avoir

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} i^2 x_{1i} + 3\nu^2 + 1 = 4\nu^2.$$

Les formules précédentes donnent immédiatement les suivantes :

$$x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + \cdots + (\nu - 1)x_{1,\nu-1} = 3(\nu - 1), \qquad (2)$$

$$x_{11} + 4x_{12} + 9x_{13} + \cdots + (\nu - 1)^2 x_{1,\nu-1} = \nu^2 - 1. \qquad (3)$$

D'une manière analogue, on aura

$$x_{21} + 2x_{22} + \cdots + (\nu - 1)x_{2,\nu-1} = 3(\nu - 1), \qquad (4)$$

$$x_{21} + 4x_{22} + \cdots + (\nu - 1)^2 x_{2,\nu-1} = \nu^2 - 1. \qquad (5)$$

Telles sont les formules auxquelles doivent satisfaire les nombres de droites fondamentales de G_1, G_2 pour θ_{11}.

26. Remarque sur les formules précédentes. — Si l'on compare les cinq formules précédentes aux formules de Cremona relatives aux transformations birationnelles planes dans lesquelles à une droite correspond une courbe d'ordre ν, on constate qu'elles sont identiques. Ce résultat s'explique aisément.

Rapportons projectivement les quadriques circonscrites à une cubique gauche C aux droites d'un plan π; nous établissons ainsi une correspondance birationnelle entre les bisécantes de C et les points de π, sans aucune exception. Toutes les propriétés des réseaux de degré un de courbes planes se transportent immédiatement aux réseaux de degré un de surfaces appartenant à la congruence formée par les cordes de C. A un point-base i-uple correspond notamment une droite-base i-uple. A une courbe d'ordre ν correspond une surface d'ordre 2ν et réciproquement.

Cela étant, rapportons projectivement les quadriques circonscrites à C_1 aux droites d'un plan π_1, les quadriques circonscrites à C_2 aux droites d'un plan π_2. A la correspondance birationnelle θ_{11} correspond une correspondance birationnelle entre π_1, π_2 qui, en vertu de la remarque précédente, est régie par les cinq formules établies plus haut.

Nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet. Bornons-nous toutefois à observer que la remarque précédente peut faire découvrir de nouvelles transformations birationnelles planes. Étant donnée une transformation birationnelle plane, on peut en déduire une correspondance birationnelle θ_{11} entre G_1, G_2. De θ_{11} on déduit une nouvelle transformation birationnelle θ_1 par le procédé des plans sécants, utilisé plus haut (chapitre I). Malgré son extrême simplicité, nous croyons ce procédé nouveau.

§ 2. — *La transformation* T_{11} *en général.*

27. — Les courbes fondamentales C_1, C_2 et les surfaces fondamentales correspondantes. — Ainsi que nous l'avons vu plus haut, à un point de C_1 correspond une courbe plane d'ordre 2ν, dont le plan passe par a_2, possédant trois points multiples d'ordre ν sur C_2. Cette courbe, lorsque le point décrit (C_1), engendre la surface fondamentale correspondante (C_1). Actuellement, on a $m_1 = 3$, $\nu_1 = 2\nu$, $\xi = 2$; donc la surface (C_1) est d'ordre $6\nu + 2$; elle passe 3ν fois par C_2 et deux fois par a_2.

De même, la surface fondamentale (C_2) est d'ordre $6\nu + 2$, passe 3ν fois par C_1 et deux fois par a_1.

28. — Les courbes fondamentales γ_1, γ_2. — Les points de γ_1 correspondent aux droites de G_2 s'appuyant sur a_2. L'ordre de γ_1 est égal au nombre des points où la surface (γ_1), d'ordre 4,

engendrée par ces droites, rencontre une section plane d'une surface F_2, en dehors de C_2 et de a_2. Actuellement, les surfaces F_2 sont d'ordre $n+1=4\nu+1$, passent 2ν fois par C_2 et une fois par a_2. L'ordre de γ_1 vaut donc $4(4\nu+1)-3.2.2\nu-1=4\nu+3\,(=n+n_2)$.

Le nombre des points d'appui de γ_1 sur C_1 est égal au nombre des points où la surface (γ_1) rencontre, en dehors de C_2 et de a_2, une section plane de la surface (C_1). Nous avons dit que ce nombre était égal à $m_1\nu_1+n_2\xi$; donc, actuellement, à $6\nu+6$. En effet, (C_1) passant 3ν fois par C_2 et deux fois par a_2, le nombre cherché est $4(6\nu+2)-3.2.3\nu-2=6\nu+6$.

Remarquons que γ_1 se trouve sur les surfaces (a_2), d'ordre 4ν, et (C_2), d'ordre $6\nu+2$. Elle s'appuie en 4ν points sur a_1, en $2i$ points sur x_{1i} bisécantes de C_1 $(i=1, 2, \ldots, \nu-1)$.

On trouve des résultats analogues pour γ_2.

29. — Les surfaces F_1, F_2 et les courbes φ_1, φ_2. — De ce qui précède nous pouvons conclure les théorèmes suivants :

Aux plans de Σ_1 *(ou de* Σ_2*) correspondent des surfaces* F_2 *(ou* F_1*) d'ordre* $4\nu+1$, *passant une fois par la droite* a_2 *(ou* a_1*),* 2ν *fois par la cubique gauche* C_2 *(ou* C_1*),* $2i$ *fois par* x_{2i} *(ou* x_{1i}*) bisécantes de cette cubique* $(i=1, 2, \ldots, \nu-1)$, *une fois par une courbe* γ_2 *(ou* γ_1*) d'ordre* $4\nu+3$.

Aux droites de Σ_1 *(ou* Σ_2*) correspondent des courbes* φ_2 *(ou* φ_1*) d'ordre* $4\nu+1$, *s'appuyant* 4ν *fois sur la droite* a_2 *(ou* a_1*),* $6\nu+2$ *fois sur la cubique gauche* C_2 *(ou* C_1*),* $2i$ *fois sur* x_{2i} *(ou* x_{1i}*) bisécante de cette cubique* $(i=1, 2, \ldots, \nu-1)$, 4 *fois sur une courbe* γ_2 *(ou* γ_1*) d'ordre* $4\nu+3$.

30. — Vérifications. — Nous allons vérifier les trois points suivants :

a) Deux surfaces F_1 se rencontrent, en dehors des courbes fondamentales, en une courbe φ_1 ;

b) Une surface F_1 et une courbe φ_1 se rencontrent, en dehors des courbes fondamentales, en un seul point;

c) L'ensemble des surfaces fondamentales de Σ_1 constitue la jacobienne du système $|F_1|$.

Remarquons tout d'abord que deux surfaces S_1 ne pouvant se toucher le long de C_1, il en est de même de deux surfaces F_1. Cela étant, si la propriété *a*) est vérifiée, on a

$$(4\nu+1)^2 = 1 + 3(2\nu)^2 + 4\sum_{i=1}^{\nu-1} i^2 x_{1i} + 4\nu + 3 + 4\nu + 1.$$

Une courbe φ_1 étant supposée ne pas toucher une surface F_1, on a, si la propriété *b*) est vérifiée,

$$(4\nu+1)^2 = 4\nu + 2\nu(6\nu+2) + 4\sum_{i=1}^{\nu-1} i^2 x_{1i} + 4 + 1.$$

Ces deux relations se ramènent immédiatement à la formule (3).

Passons à la troisième vérification. Les surfaces fondamentales de Σ_1 sont

La surface (a_2) d'ordre 4ν ;

La surface (C_2) d'ordre $6\nu + 2$;

x_{2i} surfaces d'ordre $2i (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$;

La surface (γ_2) d'ordre 4.

Or, la jacobienne de $|F_1|$ est d'ordre $4n = 16\nu$, et l'on doit donc avoir

$$16\nu = 4\nu + 6\nu + 2 + 2\sum_{i=1}^{\nu-1} i x_{2i} + 4,$$

relation qui se ramène à la formule (4).

§ 3. — *Congruences linéaires de cubiques gauches obtenues au moyen de transformations* T_{11}.

31. Recherche des transformations T_{11} convenant au problème. — Aux droites d'une congruence linéaire K_2, de Σ_2, T_{11} fait correspondre des courbes φ_1 formant une congruence linéaire K_1

dans Σ_1. Si parmi les courbes singulières de K_2 se trouvent des courbes fondamentales de Σ_2, les courbes φ_1 correspondantes se décomposent en des courbes situées sur les surfaces fondamentales de Σ_1 et en des courbes φ_1' formant la congruence linéaire K_1. Nous nous proposons de rechercher s'il est possible que les courbes φ_1' soient des cubiques gauches.

Trois cas peuvent se présenter : La congruence K_1 est formée par les droites s'appuyant

1° Sur a_2 et sur une droite d_2 de G_2, fondamentale d'ordre $2h$;

2° Sur deux droites d_2, d_2' de G_2, fondamentales d'ordres $2h$, $2h'$ respectivement ;

3° Sur C_2 et sur une droite d_2 de G_2, fondamentale d'ordre $2h$. Examinons séparément ces trois cas :

Dans le premier cas, à un point de a_2 correspond une droite, à un point de d_2 une courbe d'ordre $2h$; les courbes φ_1' sont donc d'ordre $4\nu + 1 - 1 - 2h$, et pour que ce soient des cubiques gauches, on doit donc avoir $4\nu - 2h = 3$, ce qui est impossible.

Dans le deuxième cas, les courbes φ_1' sont d'ordre $4\nu + 1 - 2h - 2h'$; on doit donc avoir $h + h' = 2\nu - 1$. Les surfaces S_2 passent $2h$ fois par d_2, $2h'$ fois par d_2'; ces surfaces sont en nombre ∞^4; elles ne peuvent donc être des quadriques, et une droite quelconque s'appuyant sur C_2, d_2 et d_2' ne peut appartenir à l'une de ces surfaces. On doit donc avoir $2\nu + 2h + 2h' \leq 4\nu$, ou $h + h' \leq \nu$. On doit donc avoir en fin de compte $2\nu - 1 \leq \nu$; d'où $\nu = 1$. Mais les droites fondamentales sont au plus d'ordre $2(\nu - 1)$; pour $\nu = 1$, il n'y a donc pas de telles droites; donc le deuxième cas ne peut se présenter.

Passons au troisième cas. A un point de C_2 correspond une courbe d'ordre 2ν, à un point de d_2 une courbe d'ordre $2h$; donc pour que les courbes φ_1' soient des cubiques gauches, on doit avoir $4\nu + 1 - 2\nu - 2h = 3$, c'est-à-dire $h = \nu - 1$. G_2 doit donc posséder une droite fondamentale d'ordre (maximum) $2(\nu - 1)$.

32. — Transformation T_{11} possédant une droite fondamentale d'ordre $2(\nu-1)$ dans Σ_2. — Commençons par observer que si G_2 possède une seconde droite fondamentale d'ordre $2h'$, une droite s'appuyant sur C_2, d_2 et sur la seconde droite fondamentale ne peut en général appartenir à une surface S_2. On doit donc avoir $2h'+2\nu+2(\nu-1)\leq 4\nu$; d'où $h'\leq 1$. On en conclut qu'il ne peut y avoir outre d_2, que des droites fondamentales d'ordre 2.

Dans les formules (1), (4), (5), posons en conséquence $x_{22}=0$, $x_{23}=0, \ldots, x_{2,\nu-2}=0$, $x_{2,\nu-1}=1$. On obtient

$$x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1,\nu-1}=x_{21}+1,$$
$$x_{21}+\nu-1=3\nu-3, \qquad x_{21}+(\nu-1)^2=\nu^2-1.$$

Les deux dernières de ces relations donnent $x_{21}=2(\nu-1)$, et la première devient

$$x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1,\nu-1}=2\nu-1. \tag{1'}$$

Désignons par d_{2i} $(i=1, 2, \ldots, 2\nu-2)$ les $2\nu-2$ droites fondamentales doubles de G_2. Il y a donc $2(\nu-1)$ quadriques fondamentales (d_{2i}) circonscrites à C_1.

Nous allons montrer que, pour G_1, on a également $x_{11}=2(\nu-1)$, $x_{1,\nu-1}=1$.

Une droite fondamentale de G_1 est simple pour une quadrique (d_{2i}) à laquelle elle appartient; donc une surface fondamentale de G_2 passe simplement par une droite d_{2i}, si elle contient cette droite. La transformée d'un point de C_1 est d'ordre 2ν et passe simplement par une droite d_{2i}; donc par cette droite passent deux surfaces fondamentales de G_2.

Soit d une droite fondamentale de G_1 et supposons que d soit située sur h quadriques fondamentales (d_{2i}) et soit multiple d'ordre k pour la surface fondamentale d'ordre $2(\nu-1)$, (d_2).

Si $2m$ est l'ordre de la surface fondamentale (d) de G_2, cette surface passe m fois par C_2 et, par suite, la surface transformée d'un point de C_2 passe m fois par d. Or, les surfaces S_1 passent $2m$ fois par d; donc $3m+h+k=6m-1$, ou $h+k+1=3m$.

La surface (d) passe m fois par C_2, k fois par d_2 et une fois par h droites d_{2i} (celles dont les quadriques fondamentales correspondantes passent par d). Les surfaces S_2 ne peuvent rencontrer (d) en dehors de C_2 et des droites fondamentales de G_2; donc on doit avoir $2m.4\nu = 3.2\nu.m + 2h + 2(\nu - 1)k$, c'est-à-dire $m\nu = h + (\nu - 1)k$.

Des relations $3m = h + k + 1$, $m\nu = h + (\nu - 1)k$, on déduit $m(\nu - 3) = (\nu - 2)k - 1$, c'est-à-dire $(m - k)(\nu - 3) = k - 1$. Supposons $\nu > 3$. Le nombre $k - 1$ doit être multiple de $\nu - 3$. D'autre part, (d_2), étant d'ordre $2(\nu - 1)$, ne peut avoir une droite de G_1 multiple d'ordre supérieur à $\nu - 2$; donc $k \leq \nu - 2$. Deux cas peuvent se présenter :

1° $k = 1$, $m = 1$ et, par suite, $h = 1$. d est fondamentale d'ordre 2 et la quadrique fondamentale correspondante (d) passe par d_2 et par une droite d_{2i}.

2° $k = \nu - 2$, $m = \nu - 1$ et, par suite, $h = 2(\nu - 1)$. d est fondamentale d'ordre $2(\nu - 1)$ et la surface fondamentale correspondante passe $\nu - 2$ fois par d_2 et une fois par toutes les droites d_{2i}.

Dans les formules (1′), (2), (3), nous devons donc faire $x_{1,\nu-1} = 1$, $x_{1,\nu-2} = 0$, ..., $x_{1,2} = 0$ et, par suite, $x_{11} = 2(\nu - 1)$. Les configurations des droites et des surfaces fondamentales de chacune des congruences G_1, G_2 sont identiques.

Reste à examiner les cas $\nu = 1$, $\nu = 2$, $\nu = 3$.

Si $\nu = 1$, il n'y a pas de droites fondamentales.

Si $\nu = 2$, les formules (1), (2), (3), (4), (5) donnent $x_{11} = x_{21} = 3$.

Si $\nu = 3$, elles donnent $x_{11} = x_{21} = 4$, $x_{12} = x_{22} = 1$.

Ces trois cas rentrent comme cas particuliers dans le cas général.

Nous désignerons par d_1 la droite fondamentale d'ordre $2(\nu - 1)$ de G_1, par d_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, 2\nu - 2)$ les droites fondamentales doubles de G_1.

Les courbes fondamentales et les surfaces fondamentales correspondantes de Σ_1, Σ_2 étant connues, la transformation T_{11} envisagée est connue.

33. — La congruence linéaire de cubiques gauches K_1. — Dans la transformation T_{11} qui vient d'être envisagée, à un point de la cubique gauche C_2 correspond une courbe d'ordre 2ν s'appuyant en 2ν points sur a_1, en trois points ν^{uples} sur C_1, en un point $(\nu - 1)^{\text{uple}}$ sur d_1 et en un point sur chacune des droites d_{1i}.

A un point de d_1 correspond une courbe d'ordre $2\nu - 2$ s'appuyant en $2\nu - 2$ points sur a_1, en trois points $(\nu - 1)^{\text{uples}}$ sur C_1, en un point $(\nu - 2)^{\text{uple}}$ sur d_1 et en un point sur chacune des droites d_{1i}.

D'autre part, les courbes φ_1 s'appuient en 4ν points sur a_1, en $6\nu + 2$ points sur C_1, en $2(\nu - 1)$ points sur d_1, en deux points sur chacune des droites d_{1i} et en quatre points sur γ_1.

Observons que par un point de C_2 passent deux droites de la surface (γ_1) ; donc la courbe qui correspond à ce point s'appuie deux fois sur γ_1. On en conclut que les cubiques gauches φ'_1 s'appuient en deux points sur a_1, en cinq points sur C_1, en un point sur d_1 et en deux points sur γ_1. Elles forment donc bien une congruence et cette congruence, K_1, est linéaire par construction.

Proposons-nous de rechercher la classe de la congruence K_1, c'est-à-dire le nombre des cubiques φ'_1 de K_1 s'appuyant sur une droite r de Σ_1 en deux points.

Soit $\overline{\varphi_2}$ la courbe de Σ_2 qui correspond à r. Aux cubiques φ'_1 de K_1 ayant r comme bisécante, correspondant des droites de K_2 s'appuyant en deux points sur $\overline{\varphi_2}$, ces points étant distincts des points d'appui de ces droites sur C_2 et d_2.

La courbe $\overline{\varphi_2}$ est d'ordre $4\nu + 1$, s'appuie en $6\nu + 2$ points sur C_2, en $2(\nu - 1)$ points sur d_2 et est rationnelle. Les bisécantes de $\overline{\varphi_2}$ s'appuyant sur une droite engendrent une surface d'ordre $2\nu(4\nu - 1) + 2\nu(4\nu + 1) = 16\nu^2$. Si cette droite est d_2, la surface se décompose en $2(\nu - 1)$ cônes d'ordre 4ν projetant $\overline{\varphi_2}$ des points communs à cette courbe et à d_2, et en une surface d'ordre $16\nu^2 - 8\nu(\nu - 1) = 8\nu(\nu + 1)$. Cette surface passe $4\nu - 2(\nu - 1) = 2(\nu + 1)$ fois par $\overline{\varphi_2}$ et $3(\nu + 1)(2\nu - 1)$ fois par d_2. La classe de K_1 est égale au nombre de points où C_2 rencontre cette surface en dehors de $\overline{\varphi_2}$ et de d_2. On trouve

$$3 . 8\nu(\nu+1) - 2(\nu+1)(6\nu+2) - 2 . 3(\nu+1)(2\nu-1) = 2(\nu+1).$$

Les cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche C, *en un point sur une bisécante* d *de* C, *en deux points sur une droite* a *et en deux points sur une courbe* γ, *d'ordre* $4\nu+3$, *s'appuyant elle-même en* $6(\nu+1)$ *points sur* C, *en* $2(\nu-1)$ *points sur* d *et en* 4ν *points sur* a, *constituent une congruence linéaire de classe* $2(\nu+1)$.

Le résultat précédent n'est pas en défaut lorsque $\nu = 1$. On sait qu'alors G_1 et G_2 ne possèdent pas de droite fondamentale. On prendra pour d_2 une droite arbitraire de G_2 et pour d_1 la droite correspondante de G_1.

La congruence rencontrée ici n'est pas nouvelle; elle est un cas particulier d'une congruence rencontrée par M. Godeaux (*).

CHAPITRE IV.

Les transformations T_{22}.

§ 1. — *Étude de la correspondance* θ_{22}.

34. — Propriétés des surfaces d'une congruence linéaire de droites possédant deux lignes singulières. — Soit G une congruence linéaire de droites, de classe μ, possédant deux lignes singulières. On sait que ces lignes sont nécessairement

(*) *Détermination des congruences linéaires de cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique fixe.* (Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, 1911, XXXII, pp. 286-291.) Voir § 4 de ce travail. La courbe A considérée par M. Godeaux se décompose entre la droite et la courbe γ du texte. On passe des notations de M. Godeaux aux nôtres en remplaçant m, n', ν respectivement par $4(\nu+1)$, $2(\nu-1)$, 0.

une droite C′ et une courbe C″, d'ordre μ, s'appuyant en $\mu - 1$ points sur C′.

Les droites de G s'appuyant sur une droite r forment une surface d'ordre $\mu + 1$ passant μ fois par C′, une fois par C″. Les droites passant par un point de C″ forment un plan passant par C′; celles qui passent par un point de C′ forment un cône d'ordre μ passant $\mu - 1$ fois par C′ et une fois par C″. Ces cônes forment un faisceau et ne peuvent se toucher le long de C″, mais leurs $n - 1$ nappes se touchent le long de C′. En d'autres termes, les $n - 1$ plans tangents à ces cônes le long de C′ sont fixes; ce sont les plans tangents à la courbe C″ aux points où cette courbe rencontre C′.

Une surface F, *d'ordre* m, *appartenant à* G *et passant* m_1 *fois par* C′, *passe nécessairement* $m_2 = m - m_1$ *fois par* C″.

En effet, une droite de G, n'appartenant pas à F, ne peut rencontrer cette surface en dehors des lignes singulières C′, C″.

Une droite d *de la congruence* G *ne peut appartenir à la surface* F, *d'ordre* $m_1 + m_2$, *avec une multiplicité supérieure au plus petit des nombres* m_1, m_2.

En effet, un plan passant par C′ ne peut rencontrer F en une droite de multiplicité supérieure à m_2 et un cône projetant C″ d'un point de C′ ne peut rencontrer F, en dehors de C′, en une droite de multiplicité supérieure à m_1.

Deux surfaces irréductibles, appartenant à G, *ne peuvent se toucher le long de la courbe* C″.

En effet, si F, F′ sont des surfaces de G et si une nappe de F et une nappe de F′ se touchent en un point P de C″, ces deux nappes ont en commun une droite de G passant par P. S'il y a contact entre les deux nappes en tout point de C″, les deux surfaces ont une partie commune, ce qui est impossible, puisqu'elles sont irréductibles.

Si deux surfaces irréductibles de la congruence G *se touchent le long de la droite* C′, *le plan tangent commun est un des* $\mu - 1$ *plans touchant* C″ *en un des points de cette courbe situés sur* C′.

En effet, si deux nappes de deux surfaces se touchent le long de C', ces deux nappes possèdent une même droite de G infiniment voisine de C', ou bien elles ont une génératrice commune en chaque point de C'. Dans le premier cas, cette droite de G infiniment voisine de C' est située dans un des $\mu - 1$ plans tangents à C'' et le théorème est démontré; dans le second, les deux surfaces ont une partie commune, ce qui est impossible.

35. — Premier groupe de formules pour θ_{22}. — Supposons que G_1 soit formée par les droites s'appuyant sur une droite C_{11} et sur une courbe C_{12}, d'ordre n_1, rencontrant C_{11} en $n_1 - 1$ points; G_2 par les droites s'appuyant sur une droite C_{21} et sur une courbe C_{22} d'ordre n_2 rencontrant C_{21} en $n_2 - 1$ points.

A une surface R_1 (ou R_2) de G_1 (ou de G_2), θ_{22} fait correspondre une surface S_2 (ou S_1) de G_2 (ou de G_1), d'ordre n, passant ν_{21} fois par C_{21}, ν_{22} fois par C_{22} (ou ν_{11} fois par C_{11} et ν_{12} fois par C_{12}). On doit avoir

$$n = \nu_{11} + \nu_{12} = \nu_{21} + \nu_{22}.$$

Nous supposerons que G_1 possède x_{11} droites fondamentales simples, ..., x_{1h} droites fondamentales h^{uples}, h étant au plus égal au plus petit des nombres ν_{11}, ν_{12}. De même, G_2 possédera x_{21} droites fondamentales simples, ..., x_{2h} droites fondamentales d'ordre h', h' étant inférieur ou égal au plus petit des nombres ν_{21}, ν_{22}.

Nous n'excluons pas la possibilité, pour quelques-unes de ces droites fondamentales, d'être infiniment voisines de C_{11} ou de C_{21}.

Deux surfaces R_2 se rencontrent en $n_2 + 1$ droites variables; donc deux surfaces S_1 se rencontrent en $n_2 + 1$ droites, en dehors des courbes singulières et des droites fondamentales de G_1. On a, par suite,

$$\sum_{i-1}^{h} i^2 x_{1i} + \nu_{11}^2 + n_1 \nu_{12}^2 + n_2 + 1 = n^2.$$

Une surface R_2 étant rationnelle, il en est de même d'une surface S_1. Exprimons donc qu'une section plane de cette surface est rationnelle :

$$\sum_{i=1}^{h} i(i-1)\, x_{1i} + \nu_{11}(\nu_{11}-1) + n_1\nu_{12}(\nu_{12}-1) = (n-1)(n-2).$$

De ces deux formules, on déduit, en remplaçant n par $\nu_{11}+\nu_{12}$,

$$\sum_{i=1}^{h} i\,x_{1i} - 2\nu_{11} + (n_1-3)\nu_{12} + n_2 + 3 = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{h} i^2 x_{1i} + (n_1-1)\nu_{12}^2 - 2\nu_{11}\nu_{12} + n_2 + 1 = 0. \tag{2}$$

De même, on trouve

$$\sum_{i=1}^{h'} i\,x_{2i} - 2\nu_{21} + (n_2-3)\nu_{22} + n_1 + 3 = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{h'} i^2 x_{2i} + (n_2-1)\nu_{22}^2 - 2\nu_{21}\nu_{22} + n_1 + 1 = 0. \tag{4}$$

Enfin, le théorème sur le nombre des droites fondamentales établi au chapitre Ier donne actuellement

$$\sum_{1}^{h} x_{1i} + 1 + n_1 - n_1 = \sum_{1}^{h'} x_{2i} + 1 + n_2 - n_2,$$

c'est-à-dire

$$x_{11} + \cdots + x_{1h} = x_{21} + \cdots + x_{2h}. \tag{5}$$

36. — Second groupe de formules pour θ_{22}. — Les plans passant par C_{21} contiennent chacun ∞' droites de G_2 formant un faisceau. A l'un de ces faisceaux, θ_{22} fait correspondre une surface (P_{22}) d'ordre ν_{22}, de G_1, transformée du point P_{22} de C_{22}, sommet du faisceau envisagé. Exprimons qu'une section plane de la surface (P_{22}) est rationnelle et que deux surfaces telles que (P_{22}) ne peuvent se rencontrer en dehors des courbes singulières et des droites fondamentales de G_1 (puisque deux plans passant par C_2 n'ont aucune droite de G_2 commune). A cet effet, nous supposerons que les surfaces (P_{22}) passent une fois par x'_{11} droites fondamentales de G_1, ..., k fois par x'_{1k} droites fondamentales de G_1, ν'_{11} fois par C_{11}, ν'_{12} fois par C_{22}, k étant au

plus égal au plus petit des nombres ν'_{11}, ν'_{12}. Après quelques transformations, on trouve, en remarquant que $\nu_{22} = \nu'_{11} + \nu'_{12}$,

$$\sum_{i=1}^{k} i x'_{1i} - 2\nu'_{11} + (n_1 - 3)\nu'_{12} + 2 = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 x'_{1i} + (n_1 - 1)\nu'^2_{12} - 2\nu'_{11}\nu'_{12} = 0. \tag{7}$$

Considérons maintenant la transformée (P_{21}) d'un point P_{21} de la droite C_{21}. Elle est d'ordre ν_2, et nous supposerons qu'elle passe ν''_{11} fois par C_{11}, ν''_{12} fois par C_{12}, une fois par x''_{11} droites fondamentales de G_1, ..., l fois par x''_{1l} droites fondamentales de G_1. Le nombre l est au plus égal au plus petit des nombres ν''_{11}, ν''_{11} et l'on a $\nu_{21} = \nu''_{11} + \nu''_{12}$.

Nous exprimerons qu'une section plane de la surface (P_{21}) est rationnelle et que deux surfaces telles que (P_{22}) se rencontrent, en dehors des courbes singulières et des droites fondamentales de G_1, en $n_2 + 1$ droites (ces droites correspondent aux $n_2 + 1$ droites de G_2, infiniment voisines de C_{21}, communes à deux cônes projetant C_{22} de deux points de C_{21}). Après quelques transformations, on trouve

$$\sum_{i=1}^{l} i x''_{1i} - 2\nu''_{11} + (n_1 - 3)\nu''_{12} + n_2 + 1 = 0, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{l} i^2 x''_{1i} + (n_1 - 1)\nu''^2_{12} - 2\nu''_{11}\nu''_{12} + n_2 - 1 = 0. \tag{9}$$

Enfin, observons que deux surfaces (P_{21}), (P_{22}) ont en commun, en dehors des courbes singulières et des droites fondamentales de G_1, une droite simple de cette congruence. Ceci nous donne la relation

$$X_1 + (n_1 - 1)\nu'_{12}\nu''_{12} - \nu'_{12}\nu''_{12} - \nu''_{11}\nu'_{12} + 1 = 0, \tag{10}$$

X_1 représentant la somme des produits des multiplicités de chaque droite fondamentale de G_1 pour les surfaces (P_{21}), (P_{22}).

Remarquons que la surface S_1 correspondant à la surface R_2, relative à une droite de G_2, se décompose en une surface (P_{21}) et une surface (P_{22}). La somme des multiplicités d'une droite fondamentale de G_1 pour ces surfaces est donc égale à la multiplicité de cette droite pour les surfaces S_1. En se basant sur cette remarque, il est facile de voir que les formules (1) et (2) se déduisent des formules (6), (7), (8), (9) et (10).

En adoptant des notations analogues, on déduit des relations semblables pour les nombres des droites fondamentales de G_2. Avant de les écrire, observons toutefois que la surface (P_{11}), d'ordre ν_{11}, transformée par θ_{22} d'un point P_{11} de C_{11}, passe nécessairement ν''_{11}, fois par C_{21}, ν'_{11} fois par C_{22}, et que, de même, la transformée (P_{12}) par θ_{22}, d'ordre ν_{12}, d'un point P_{12} de C_{12}, passe ν''_{12} fois par C_{21}, ν'_{12} fois par C_{22}. On a donc $\nu_{11} = \nu'_{11} + \nu''_{11}$, $\nu_{12} = \nu'_{12} + \nu''_{12}$ et les formules suivantes :

$$\sum_{i=1}^{k'} i x'_{2i} - 2\nu''_{12} + (n_2 - 3)\nu'_{12} + 2 = 0, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{k'} i^2 x'_{2i} + (n_2 - 1)\nu'^2_{12} - 2\nu'_{12}\nu''_{12} = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{l'} i x''_{2i} - 2\nu''_{11} + (n_2 - 3)\nu'_{11} + n_1 + 1 = 0, \tag{13}$$

$$\sum_{i=1}^{l'} i^2 x''_{2i} + (n_2 - 1)\nu'^2_{11} - 2\nu'_{11}\nu''_{11} + n_1 - 1 = 0, \tag{14}$$

$$X_2 + (n_2 - 1)\nu'_{12}\nu'_{11} - \nu'_{11}\nu''_{12} - \nu'_{12}\nu''_{11} + 1 = 0. \tag{15}$$

37. — Remarque sur la définition de θ_{22}. — Les surfaces (P_{21}), transformées par θ_{22} des points P_{21} de C_{21}, forment un faisceau. En effet, par un point Q passe une droite de G_1 ; à cette droite correspond par θ_{22} une droite de G_2 rencontrant C_{21} en un seul point. La surface (P_{21}) correspondant, par θ_{22}, à ce point est la seule surface (P_{21}) passant par le point Q. Les surfaces (P_{21}) forment donc bien un faisceau $|(P_{21})|$. Les éléments-base du faisceau $|(P_{21})|$ sont les courbes singulières de G_1, des droites fondamentales de G_1 et les $n_2 + 1$ droites de G_1 que θ_{22} fait correspondre aux droites de G_2 infiniment voisines de C_{21}.

De même, les surfaces (P_{22}) transformées des points P_{22} de C_{22} forment un faisceau $|(P_{22})|$ dont les éléments-base sont les courbes singulières de G_1 et les droites fondamentales de cette congruence.

La connaissance des congruences G_1, G_2 et des faisceaux de surfaces de G_1 : $|(P_{21})|$, $|(P_{22})|$ suffit, en général, pour déterminer complètement la correspondance θ_{22}.

Il importe de remarquer que les droites de G_1 qui correspondent aux droites de G_2 infiniment voisines de C_{21}, qui sont des droites-base des surfaces de $|(P_{21})|$, ne sont pas, en général, des droites fondamentales.

§ 2. — *La transformation* T_{22} *en général.*

38. — Les courbes fondamentales pour T_{22}, singulières de G_1, G_2, et les surfaces fondamentales correspondantes. — A un point de C_{11}, T_{22} fait correspondre, dans Σ_2, une courbe d'ordre ν_{11}, ayant un point ν''_{11}-uple sur C_{21}, n_2 points ν'_{11}-uples sur C_{22} et située dans plan passant par a_2. Lorsque le point parcourt C_{11}, cette courbe décrit la surface fondamentale (C_{11}) de Σ_2, d'ordre $\nu_{11}+1$, passant simplement par a_2, ν''_{11} fois par C_{21}, ν'_{11} par C_{22}. De plus, il y a x''_{2i} droites fondamentales de G_2, i-uples pour (C_{11}). $(i=1, 2, \ldots, l')$.

A un point de C_{12} correspond une courbe d'ordre ν_{12}, ayant un point ν''_{12}-uple sur C_{21}, n_2 points ν'_{12}-uples sur C_{22} et située dans un plan passant par a_2. La surface (C_{12}) engendrée par ces courbes est d'ordre $n_1\nu_{12}+1$; elle passe $n_1\nu''_{12}$ fois par C_{21}, $n_1\nu'_{12}$ fois par C_{22} et une fois par a_2. De plus, il y a x'_{2i} droites fondamentales de G_2, $n_1 i$-uples pour (C_{12}) $(i=1, 2, \ldots, k')$.

De même, la surface fondamentale (C_{21}) de Σ_1 est d'ordre $\nu_{21}+1$ et passe une fois par a_1, ν''_{11} fois par C_{11}, ν''_{12} fois par C_{22} et i fois par x''_{1i} droites fondamentales de G_1. $(i=1, 2, \ldots, l)$.

La surface fondamentale (C_{22}) de Σ_1 est d'ordre $n_2\nu_{22}+1$ et passe une fois par a_1, $n_2\nu'_{11}$ fois par C_{11}, $n_2\nu'_{12}$ fois par C_{12} et $n_2 i$ fois par x'_{1i} droites fondamentales de G_1. $(i=1, 2, \ldots, k)$.

39. — Les courbes fondamentales γ_1, γ_2. — Comme nous l'avons vu, l'ordre de la courbe γ_1 est égal au nombre de points où la surface (γ_1), d'ordre $n_2 + 1$, lieu des droites de G_2, s'appuyant sur a_2, rencontre, en dehors de a_2, C_{21}, C_{22}, une section plane d'une surface F_2. Or, une telle surface est d'ordre $n + 1 = \nu_{21} + \nu_{22} + 1$; elle passe ν_{21} fois par C_{11}, ν_{22} fois par C_{22}, une fois par a_2. On a donc, pour le nombre cherché,

$$(n_2 + 1)(\nu_{21} + \nu_{22} + 1) - n_2\nu_{21} - n_2\nu_{22} - 1 = n_2 + \nu_{21} + \nu_{22} = n_2 + n,$$

comme nous l'avions écrit plus haut.

Recherchons maintenant en combien de points la courbe γ_1 s'appuie sur C_{11}. Nous avons vu que ce nombre était égal à celui des points où la surface (γ_1) rencontre, en dehors de C_{21}, C_{22}, a_2, une section plane de la surface (C_{11}), c'est-à-dire au nombre des droites de G_2 s'appuyant sur a_2, et appartenant à (C_{11}). On trouve, pour le nombre cherché,

$$(n_2 + 1)(\nu_{11} + 1) - n_2\nu''_{11} - n_2\nu'_{11} - 1 = n_2 + \nu_{11}.$$

De même, le nombre de points d'appui de γ_1 sur C_{12} est égal à

$$(n_2 + 1)(n_1\nu_{12} + 1) - n_1n_2\nu''_{12} - n_1n_2\nu'_{12} - 1 = n_2 + n_1\nu_{12}.$$

Ces résultats sont conformes à ceux que nous avions énoncés plus haut, au chapitre II.

Joignant les résultats obtenus ici aux résultats généraux, nous avons le théorème suivant :

La courbe fondamentale γ_1 *(ou* γ_2*), d'ordre* $\mathrm{n} + \mathrm{n}_2$ *(ou* $\mathrm{n} + \mathrm{n}_1$*) s'appuie en* n *points sur* a_1 *(ou* a_2*), en* $\mathrm{n}_2 + \nu_{11}$ *points sur* C_{11} *(ou* $\mathrm{n}_1 + \nu_{21}$ *points sur* C_{21}*), en* $\mathrm{n}_2 + \mathrm{n}_1\nu_{12}$ *(ou* $\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2\nu_{22}$*) points sur* C_{12} *(ou* C_{22}*), en* i *points sur une droite fondamentale d'ordre* i.

40. — Les surfaces F_1, F_2 et les courbes φ_1, φ_2. — Les courbes et les surfaces fondamentales de Σ_1, Σ_2 étant connues,

la transformation T_{22} est connue et l'on a les théorèmes suivants :

Les surfaces F_1 (*ou* F_2), *d'ordre* $n+1$, *passent une fois par* a_1 (*ou* a_2), ν_{11} (*ou* ν_{21}) *fois par* C_{11} (*ou* C_{21}), ν_{12} (*ou* ν_{22}) *fois par* C_{12} (*ou* C_{22}), *une fois par* γ_1 (*ou* γ_2), i *fois par* x_{1i} (*ou* x_{2i}) *droites de* G_1 (*ou* G_2). ($i = 1, 2, \ldots, h$ *ou* $i = 1, 2, \ldots, h'$).

Les courbes φ_1 (*ou* φ_2), *d'ordre* $n+1$, *s'appuient en* n *points sur* a_1 (*ou* a_2), *en* $\nu_{11}+1$ (*ou* $\nu_{21}+1$) *points sur* C_{11} (*ou* C_{21}), *en* $n_1\nu_{21}+1$ (*ou* $n_2\nu_{22}+1$) *points sur* C_{12} (*ou* C_{22}), *en* n_2+1 (*ou* n_1+1) *points sur* γ_1 (*ou* γ_2), *en* i *points sur* x_{1i} (*ou* x_{2i}) *droites de* G_1 (*ou* G_2). ($i = 1, 2, \ldots, h$ *ou* h').

41. — Vérifications. — Exprimons que deux surfaces F_1 se rencontrent, en dehors des courbes fondamentales, en une courbe φ_1. Nous obtenons

$$(n+1)^2 = 1 + \nu_{11}^2 + n_1\nu_{12}^2 + n + n_2 + \sum_{i=1}^{h} i^2 x_{1i} + n + 1.$$

Exprimons de même qu'une surface F_1 rencontre une courbe φ_1, en dehors des courbes fondamentales, en un seul point :

$$(n+1)^2 = n + \nu_{11}(\nu_{11}+1) + \nu_{12}(n_1\nu_{12}+1) + n_2 + 1 + \sum_{i=1}^{h} i^2 x_{1i} + 1.$$

Ces deux relations se ramènent à la relation (2) trouvée plus haut.

La jacobienne du système linéaire $|F_1|$ est d'ordre $4n$. Elle se compose de la surface (a_2) d'ordre n, de (C_{21}) d'ordre $\nu_{21}+1$, de (C_{22}) d'ordre $n_2\nu_{22}+1$, de (γ_1) d'ordre n_1+1 et de x_{2i} surfaces fondamentales de G_1 d'ordre i. ($i = 1, 2, \ldots, h'$). On doit avoir

$$4n = n + \nu_{21} + 1 + n_2\nu_{22} + 1 + n_1 + 1 + \sum_{i=1}^{h'} i x_{2i},$$

relation vérifiée identiquement, en vertu de la formule (3) trouvée plus haut.

§ 3. — *Sur quelques congruences linéaires de cubiques gauches obtenues au moyen de transformations* T_{22}.

42. — Nous nous proposons de rechercher les transformations T_{22} pour lesquelles aux points de C_{21} correspondent des courbes d'ordre $n-2$. Alors, à une droite de Σ_2 s'appuyant sur C_{21} correspond une courbe φ_1 dégénérée en une courbe d'ordre $n-2$ située sur (C_{21}) et en une cubique gauche φ_1'. De cette manière, aux droites de Σ_2 d'une congruence linéaire K_2 dont C_{21} est une courbe singulière, correspondent les cubiques gauches d'une congruence linéaire K_1.

A un point P_{21} de C_{21} correspond une courbe d'ordre ν_{21}. On doit donc avoir $\nu_{21}=n-2$ ou, comme $n=\nu_{21}+\nu_{22}$, $\nu_{22}=2$.

Les surfaces (P_{22}) sont actuellement des quadriques. Il existe donc un faisceau de quadriques appartenant à G_1 et passant par les deux lignes singulières C_{11}, C_{12} de cette congruence, car les quadriques ne peuvent passer deux fois par aucune de ces lignes. On a donc $\nu_{11}'=\nu_{12}'=1$ et $n_1\leq 3$.

Les formules (6), (7) donnent $x_{11}'=3-n_1$, $k=1$.

Les formules (11), (12) deviennent

$$\sum_{i=1}^{k'} i x_{2i}'-2\nu_{12}''+n_2-1=0, \qquad \sum_{i=1}^{k'} i^2 x_{2i}'-2\nu_{12}''+n^2-1=0.$$

En soustrayant ces équations membre à membre, on trouve

$$\sum_{i=1}^{k'} i(i-1)x_{2i}'=0.$$

Donc, pour $i>1$, $x_{2i}'=0$, c'est-à-dire $k'=1$. On a alors

$$x_{21}'=2\nu_{12}''-n_2+1. \tag{I}$$

De même, les formules (13), (14) donnent

$$\sum_{i=1}^{l'} i x_{2i}''-2\nu_{11}''+n_1+n_2-2=0, \quad \sum_{i=1}^{l'} i^2 x_{2i}''-2\nu_{11}''+n_1+n_2-2=0.$$

On en déduit, par soustraction,

$$\sum_{i=1}^{l'} i(i-1)x''_{2i} = 0.$$

On doit donc avoir $x''_{2i} = 0$ pour $i > 1$, c'est-à-dire $l' = 1$, et

$$x''_{21} = 2\nu''_{11} - n_1 - n_2 + 2. \tag{II}$$

Les surfaces (P_{11}), (P_{12}) passent donc simplement par les droites fondamentales de G_2. Ces droites sont donc au plus d'ordre deux et l'on a nécessairement $h' \leq 2$, $x_{22} = X_2$, $x'_{21} = x_{21} + 2x_{22}$. La formule (15) donne

$$x_{22} = \nu''_{11} + \nu''_{12} - n_2 = \nu_{21} - n_2. \tag{III}$$

Les formules (3), (4) deviennent

$$x_{21} + 2x_{22} - 2\nu_{21} + n_1 + 2n_2 - 3 = 0,$$
$$x_{21} + 4x_{22} - 4\nu_{21} + n_1 + 4n_2 - 3 = 0.$$

On en déduit, par (III), $x_{21} = 3 - n_1$.

43. — Examen du cas $n_1 = 3$. — Si $n_1 = 3$, on a $x'_{11} = 0$, $x_{21} = 0$. Aux plans passant par C_{21}, θ_{22} fait correspondre les quadriques passant par C_{11} et C_{12}.

Puisque $x_{21} = 0$, on a $x_{22} = x'_{21} = x''_{21}$; on en déduit $\nu''_{11} = \nu''_{12} + 1$. Nous poserons $\nu''_{12} = \varepsilon$; d'où $\nu''_{11} = \varepsilon + 1$, $\nu_{21} = 2\varepsilon + 1$.

La condition $x'_{11} = 0$ entraîne $x''_{1i} = x_{1i}$ et les formules (8) et (5) donnent

$$\sum_1^h i x_{1i} + n_2 + 1 = 2\varepsilon + 2,$$

$$\sum_1^h x_{1i} + n_2 = 2\varepsilon + 1.$$

On en déduit, par soustraction, $\Sigma(i-1)x_{1i} = 0$; d'où $h = 1$, $x_{11} = 2\varepsilon - n_2 + 1$. La formule III donne $x_{22} = 2\varepsilon - n_2 + 1 = x_{11}$.

Considérons une droite fondamentale d_2, d'ordre 2, de G_2. Les surfaces (P_{11}), (P_{12}) passent chacune une fois par cette droite. Soit η le nombre des surfaces fondamentales (plans) de G_2 passant par d_2. On doit avoir $\eta + 1 + 3 = 3 . 2 - 1$, c'est-à-dire $\eta = 1$. Les surfaces fondamentales de G_1 sont x_{22} quadriques contenant chacune une des $x_{11} = x_{22}$ droites fondamentales de G_1. Les surfaces fondamentales de G_2 sont x_{11} plans contenant chacun une des $x_{22} = x_{11}$ droites fondamentales (doubles) de G_2. En comptant le nombre de nappes des surfaces transformées des points de C_{11}, C_{12} passant par C_{21}, on constate de plus que ces x_{11} plans passent tous par C_{21}, même si $n_2 = 1$. On a, en effet, $\nu''_{11} + 3\nu''_{12} + x_{11} = 3\nu_{21} - n_2 - 1$.

A un point de C_{21} correspond une courbe d'ordre $2\varepsilon + 1$ ayant $2\varepsilon + 1$ points sur a_1, un point $(\varepsilon + 1)$-uple sur C_{11}, trois points ε-uples sur C_{12}, n_2 points sur γ_1 (correspondant aux n_2 droites de G_2 passant par un point de C_{21} et s'appuyant sur a_2), un point sur chacune des x_{11} droites fondamentales de G_1.

Les courbes φ_1 sont d'ordre $n + 1 = \nu_{21} + \nu_{22} + 1 = 2\varepsilon + 4$ et s'appuient en $n = 2\varepsilon + 3$ points sur a_1, en $\nu_{11} + 1 = \nu'_{11} + \nu''_{11} + 1 = \varepsilon + 3$ points sur C_{11}, en $n_1\nu_{12} + 1 = 3(\nu'_{12} + \nu''_{12}) + 1 = 3\varepsilon + 4$ points sur C_{12}, en $n_2 + 1$ points sur γ_1, en un point sur chacune des x_{11} droites fondamentales de G_1.

Les cubiques gauches φ'_1 (correspondant aux droites de Σ_2 s'appuyant sur C_{21}) s'appuient en $2\varepsilon + 3 - (2\varepsilon + 1) = 2$ points sur a_1, en $\varepsilon + 3 - (\varepsilon + 1) = 2$ points sur C_{11}, en $3\varepsilon + 4 - 3\varepsilon = 4$ points sur C_{12} et en $n_2 + 1 - n_2$ points sur C_{12}. Elles ne rencontrent pas les droites fondamentales de G_1.

La courbe γ_1, d'ordre $n + n_2 = n_2 + 2\varepsilon + 3$, s'appuie en $2\varepsilon + 2$ points sur a_1, en $n_2 + \varepsilon + 2$ points sur C_{11}, en $n_2 + 3\varepsilon + 3$ points sur C_{12}, en un point sur chacune des x_{11} droites fondamentales de G_1.

Considérons une courbe H_2 d'ordre m, s'appuyant en $m - 1$ points sur la droite C_{21}. Il lui correspond une courbe H_1 d'ordre $3m + 2\varepsilon + 1$, s'appuyant en $2m + 2\varepsilon + 1$ points sur a_1, en $2m + \varepsilon + 1$ points sur C_{11}, en $4m + 3\varepsilon$ points sur C_{12}, en $m + n_2$ points sur γ_1, et en un point sur chacune des x_{11} droites fondamentales de G_1.

Les droites s'appuyant sur C_{21} et H_2 forment un congruence linéaire K_2 ; les cubiques gauches φ_1' qui leur correspondent forment une congruence K_1 également linéaire.

La classe de K_1 est égale au nombre de droites de K_2 s'appuyant en deux points sur une courbe φ_2. Une telle courbe est d'ordre $2\varepsilon + 4$ et s'appuie en $2\varepsilon + 1$ points sur C_{21} ; par conséquent, les bisécantes de φ_2 s'appuyant sur C_{21} forment une réglée d'ordre $4\varepsilon + 6$ passant $4\varepsilon + 3$ fois par C_{21}. Le nombre cherché est égal au nombre des points de rencontre de cette réglée et de H_2 en dehors de C_{21}, donc à

$$m(4\varepsilon + 6) - (m - 1)(4\varepsilon + 3) = 3m + 4\varepsilon + 3.$$

Les cubiques gauches s'appuyant en quatre points sur une cubique gauche C_{12}, *en deux points sur une bisécante* C_{11} *de* C_{12}, *en deux points sur une droite* a_1, *en un point sur une courbe* γ_1 *d'ordre* $n_2 + 2\varepsilon + 3$ (*s'appuyant en* $2\varepsilon + 2$ *points sur* a_1, *en* $n_2 + \varepsilon + 1$ *points sur* C_{11}, *en* $n_2 + 3\varepsilon + 3$ *points sur* C_{12}) *et en un point sur une courbe* H_1 *d'ordre* $3m + 2\varepsilon + 1$ (*s'appuyant en* $2m + 2\varepsilon + 1$ *points sur* a_1, *en* $2m + \varepsilon + 1$ *points sur* C_{11}, *en* $4m + 3\varepsilon$ *points sur* C_{12}, *en* $m + n_2$ *points sur* γ_1) *forment une congruence linéaire de classe* $3m + 4\varepsilon + 3$.

Des cas particuliers de cette congruence peuvent être obtenus en partant d'une courbe H_2 s'appuyant sur C_{22}, γ_2, a_2, ou d'une courbe H_2 dégénérée en m droites infiniment voisines de C_{21}.

Observons que la congruence K_1 est un cas particulier de la congruence obtenue de la manière suivante : On considère les quadriques passant par C_{11}, C_{12} et rencontrant une courbe M en quatre points en dehors de C_{11}, C_{12}. Sur chacune de ces quadriques, ces quatre points déterminent un faisceau de cubiques gauches ayant C_{11} comme bisécante (et rencontrant donc C_{12} en quatre points). Les cubiques ainsi déterminées engendrent une congruence évidemment linéaire. Actuellement, la courbe M dégénère en les courbes a_1, γ_1, H_1. Il est curieux de voir que la classe de K_1 ne dépend pas de l'ordre de γ_1.

44. — Examen du cas $n_1 = 2$. — Si $n_1 = 2$, on a $x'_{11} = 1$, $x_{21} = 1$. Aux plans passant par C_{21} correspondent des quadriques passant par la droite C_{11}, la conique C_{12} et une droite fondamentale d_1 de G_1.

Soit d_2 la droite fondamentale d'ordre 1 de G_2. Le plan fondamental (d_2) qui lui correspond passe nécessairement par C_{11}; par suite, à un plan passant par C_{11} correspond, dans G_2, une surface (P_{12}) ne passant pas par d_2. Par contre, les surfaces (P_{11}) passent simplement par d_2, car tout cône projetant C_{12} d'un point de C_{11} a une droite simple située dans le plan (d_2). On en conclut que $x'_{21} = x_{22}$, $x''_{21} = x_{22} + 1$. Les formules (I), (II), (III) donnent alors $\nu''_{11} = \nu''_{12} + 1$. Nous poserons, comme plus haut, $\nu''_{12} = \varepsilon$; d'où $\nu''_{11} = \varepsilon + 1$, $\nu_{21} = 2\varepsilon + 1$, $x_{22} = 2\varepsilon + 1 - n_2$.

Soit maintenant δ la multiplicité, pour les surfaces S_1, de la droite d_1. Les surfaces (P_{22}) passent simplement par d_1 et les surfaces (P_{21}) passent $\delta - 1$ fois par cette droite. Actuellement on a $X_1 = \delta - 1$ et la formule (10) donne $\delta = \nu''_{11} = \varepsilon + 1$. Les surfaces S_1, d'ordre $n = \nu_{21} + \nu_{22} = 2\varepsilon + 3$, passent $\nu''_{11} + 1 = \varepsilon + 2$ fois par C_{11}, $\nu''_{12} + 1 = \varepsilon + 1$ fois par C_{12} et $\varepsilon + 1$ fois par d_1. Ces surfaces ne peuvent évidemment avoir une seconde droite multiple d'ordre $\varepsilon + 1$; par suite, $h = \varepsilon + 1$, $x_{1,\varepsilon+1} = 1$. Les formules (1) et (2) donnent alors

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon} i x_{1i} = 2\varepsilon + 1 - n_2,$$

$$\sum_{i=1}^{\varepsilon} i^2 x_{1i} = 2\varepsilon + 1 - n_2.$$

Par soustraction on en déduit $\Sigma i(i-1) x_{1i} = 0$; d'où

$$x_{11} = 2\varepsilon + 1 - n_2 (= x_{22}), \quad x_{12} = \cdots = x_{1,\varepsilon} = 0, \quad x_{1,\varepsilon+1} = 1.$$

En résumé, la congruence G_1 possède $2\varepsilon + 1 - n_2$ droites fondamentales simples, une droite fondamentale d'ordre $\varepsilon + 1$; la congruence G_2, une droite fondamentale simple et $2\varepsilon + 1 - n_2$ droites fondamentales doubles.

On voit aisément que le plan fondamental (d_2) passe par d_1. La surface fondamentale (d_1), de G_2, d'ordre $\varepsilon + 1$, passe ε fois par C_{21}, une fois par C_{22} et par toutes les droites fondamentales de G_2.

Il est clair que la congruence de cubiques gauches, que cette transformation T_{22} nous fournira, ne sera qu'un cas particulier de celle qui a été rencontrée précédemment. Les cubiques gauches de la congruence, au lieu de s'appuyer en quatre points sur une cubique gauche, s'appuieront en trois points sur une conique et en un point sur une sécante simple, d_1, de cette conique. Nous ne poursuivrons pas cette étude plus avant.

45. — Examen du cas $n_1 = 1$. — Nous avons actuellement $x_{21} = 2$. Il existe donc, dans G_1, deux plans fondamentaux, et deux cas peuvent se présenter :

a) Les deux plans fondamentaux passent par C_{11}. On a alors $x'_{21} = x_{22}$, $x''_{21} = x_{22} + 2$.

b) Les deux plans fondamentaux passent, l'un par C_{11}, l'autre par C_{12}. On a $x'_{21} = x''_{21} = x_{22} + 1$.

Examinons le cas a. — Les formules (I), (II), (III) donnent, en posant $\nu''_{12} = \varepsilon$, $\nu''_{11} = \varepsilon + 1$, $\nu_{21} = 2\varepsilon + 1$, $x_{22} = 2\varepsilon + 1 - n_2$.

D'autre part, on a $x'_{11} = 2$. Soient d_{11}, d_{12} les droites fondamentales de G_1, simples pour les surfaces (P_{22}), δ_1, δ_2 leur multiplicité respective pour les surfaces S_1. Les surfaces (P_{21}) passent $\delta_1 - 1$ fois par d_{11}, $\delta_2 - 1$ fois par d_{12}. On a donc $x_1 = \delta_1 + \delta_2 - 2$ et la formule (10) donne $\delta_1 + \delta_2 = 2\varepsilon + 2$. Mais les surfaces (P_{21}) étant d'ordre $2\varepsilon + 1$ et passant $\varepsilon + 1$ fois par C_{11}, ε fois par C_{12}, ne peuvent posséder de droites de multiplicité supérieure à ε. On a donc $\delta_1 - 1 \leq \varepsilon$, $\delta_2 - 1 \leq \varepsilon$, et, par suite, $\delta_1 = \delta_2 = \varepsilon + 1$. On trouve aisément que l'on a $x_{11} = x_{22}$, $x_{12} = \cdots = x_{1,\varepsilon} = 0$, $x_{1,\varepsilon+1} = 2$.

Les congruences de cubiques gauches que l'on peut obtenir au moyen de cette transformation sont des cas particuliers de celle qui a été rencontrée plus haut (n° 43) ; nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet.

Examinons le cas b. — Les formules (I), (II) et (III) donnent, en posant $\nu''_{12} = \varepsilon$, $\nu''_{11} = \varepsilon$, $x_{22} = 2\varepsilon - n_2$.

On a $x'_{11} = 2$. Soient encore d_{11}, d_{12} les droites fondamentales de G_1, simples pour les surfaces (P_{22}), δ_1, δ_2 leurs multiplicités respectives pour les surfaces S_1. On a $X_1 = \delta_1 + \delta_2 - 2$ et la formule (10) donne $\delta_1 + \delta_2 = 2\varepsilon + 1$. La congruence G_1 ne peut posséder, en dehors de d_{11}, d_{12}, une droite fondamentale d'ordre supérieur à un, car toutes les droites s'appuyant sur ces trois droites fondamentales appartiendraient à toutes les surfaces (P_{21}), ce qui est absurde.

En outre, comme on doit avoir $\delta_1 - 1 \leq \varepsilon$, $\delta_2 - 1 \leq 2$, on a nécessairement $\delta_1 = \varepsilon + 1$, $\delta_2 = \varepsilon$ (ou, ce qui est géométriquement la même chose, $\delta_1 = \varepsilon$, $\delta_2 = \varepsilon + 1$). Les formules (1), (2), (8) et (9) donnent alors $x_{11} = 2\varepsilon - n_2 = x_{22}$.

Les deux plans fondamentaux de G_1 sont évidemment les plans passant par d_{11} et respectivement par C_{11}, C_{12}.

Les congruences de cubiques gauches, linéaires, obtenues au moyen de la transformation T_{22} examinée ici, sont des cas particuliers de celle du n° 43. Nous nous contenterons d'indiquer le résultat.

Les cubiques gauches s'appuyant en deux points sur trois droites a_1, C_{11}, C_{12}, *en un point sur deux droites* d_{11}, d_{12} *(s'appuyant chacune sur* C_{11}, C_{12}*), en un point sur une courbe* γ_1 *d'ordre* $n_2 + 2\varepsilon + 2$ *(s'appuyant en* $2\varepsilon + 2$ *points sur* a_1, *en* $n_2 + \varepsilon + 1$ *points sur* C_{11}, C_{12}, *en* $\varepsilon + 1$ *points sur* d_{11}, *en* ε *points sur* d_{12}*) et en un point sur une courbe* H_1 *d'ordre* $3m + 2\varepsilon$ *(s'appuyant en* $2m + 2\varepsilon$ *points sur* a_1, *en* $2m + \varepsilon$ *points sur* C_{11}, C_{12}, *en* $m + \varepsilon$ *points sur* d_{11}, *en* $m + \varepsilon - 1$ *points sur* d_{12} *et en* $m + n_2$ *points sur* γ_1*) forment une congruence linéaire de classe* $3m + 4\varepsilon + 1$.

Remarquons que la classe de la congruence obtenue ici est abaissée de deux unités.

46. — Les congruences linéaires de cubiques gauches qui peuvent être obtenues au moyen de transformations T_{22}. — Pour terminer ce chapitre, nous indiquerons rapidement dans quels cas les droites d'une congruence linéaire de Σ_2 se transforment en des cubiques de gauches de Σ_1, formant évidemment une congruence linéaire, sans nous arrêter davantage sur ce sujet.

1° Les courbes φ_1 sont toutes des cubiques gauches. On a alors $n = 2$ et $n_1 = n_2 = 1$. On voit immédiatement que les cubiques gauches φ_1 s'appuient en deux points sur trois droites C_{11}, C_{12}, a_1 et en deux points sur une cubique gauche γ_1, bisécante de C_{11}, C_{12}, a_1. L'ensemble des courbes C_{11}, C_{12}, a_1, γ_1 forme une sextique de genre trois, dégénérée. On retrouve, actuellement, des cas particuliers de congruences linéaires de cubiques gauches signalées par L. Godeaux (*).

2° La congruence de droites de Σ_2 est formée par les droites s'appuyant sur C_{21} et a_2. On reconnaît aisément que les transformées des droites de cette congruence sont des cubiques planes, dont les plans passent par a_1.

3° Cette congruence de Σ_2 est formée par les droites s'appuyant sur a_2 et sur une droite fondamentale de G_2. Ici également, les transformées de ces droites sont des cubiques planes dont les plans passent par a_1.

4° La congruence de Σ_2 est formée par les droites s'appuyant sur deux droites fondamentales de G_2. Soient d, d' ces droites, λ, λ' leurs ordres : on doit avoir $\lambda + \lambda' = n - 2$. Mais une droite s'appuyant sur d, d' et C_{22} ne peut appartenir à toutes les surfaces S_2; donc (si $n_2 > 1$), $\lambda + \lambda' + \nu_{22} \leq n$. On en déduit $\nu_{22} \geqq 2$. Mais on doit avoir $\lambda \leq 2$, $\lambda' \leq 2$, donc $n \leq 6$.

5° La congruence de Σ_2 est formée par les droites s'appuyant sur C_{22} et sur une droite d, $(n_2 - 1)$ — sécante de C_{22}.

a) d n'appartient pas à G_2. Alors les surfaces S_2 ne peuvent contenir d et l'on a $(n_2 - 1)\, \nu_{22} \leq \nu_{22} + \nu_2$; d'où $(n_2 - 2)\, \nu_{22}$

(*) L. Godeaux, *Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches*. (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1909 (4), IX, pp. 260-266.)

$\leq \nu_{21}$. D'autre part, on doit avoir $n + 1 - \nu_{22} = 3$; d'où $\nu_{21} = 2$. Par conséquent, si $n_2 > 2$, $\nu_{22} \leq 2$ et $n \leq 4$. Si $n_2 = 1$, on retrouve, en permutant les rôles des droites C_{21}, C_{22}, le cas $\nu_{22} = 2$ examiné plus haut. Si $n_2 = 2$, les surfaces S_2, d'ordre $\nu_{22} + 2$, passant ν_{22} fois par la conique C_{22}, on doit avoir $2\nu_{22} \leq \nu_{22} + 2$; d'où $\nu_{22} \leq 2$ et $n \leq 4$.

b) Si d appartient à G_2, C_{22} est nécessairement une conique ($n_2 = 2$). La droite d peut être fondamentale d'ordre λ et l'on doit alors avoir $\lambda + \nu_{22} = n - 2$; d'où $\nu_{21} = \lambda + 2$.

En résumé, *les transformations* T_{22} *susceptibles de fournir des congruences linéaires de cubiques gauches sont déterminées par les conditions suivantes :*

a) $n = 2, 3, 4, 5$ *ou* 6; *ou*

b) $\nu = 2$; *ou*

c) $n_2 = 2$, *existence d'une droite de* G_2 *fondamentale d'ordre* $\nu_{21} - 2$.

CHAPITRE V.

Les transformations T_{12}.

§ 1. — *Étude de la correspondance* θ_{12}.

47. — Les surfaces transformées par θ_{12} des points singuliers. Supposons que G_1 soit constituée par les bisécantes d'une cubique gauche C_1 ($n_1 = 3$) et G_2 par les droites s'appuyant sur une droite C_{21} et sur une courbe C_{22}, d'ordre n_2, s'appuyant elle-même en $n_2 - 1$ points sur la droite C_{21}.

A un point P_{21} de C_{21}, θ_{12} fait correspondre une surface (P_{21}) qui, appartenant à G_1, a l'ordre, nécessairement pair, $2\nu_1$ et passe ν_1 fois par C_1. De même, la transformée (P_{22}) par θ_{12} d'un point P_{22} de C_{22} est une surface d'ordre $2\nu_2$, passant ν_2 fois par C_1. Les surfaces S_1 sont donc d'ordre $2\nu = 2(\nu_1 + \nu_2)$ et passent $\nu = \nu_1 + \nu_2$ fois par C_1.

La transformée par θ_{12} d'un point de C_1 est une surface d'ordre ν, passant nécessairement ν_1 fois par C_{21}, ν_2 fois par C_{22}. Les surfaces S_2, d'ordre 2ν, passent $2\nu_1$ fois par C_{21}, $2\nu_2$ fois par C_{22}.

A une quadrique Q_1 de G_1, θ_{12} fait donc correspondre une surface Q_2, d'ordre ν, passant ν_1 fois par C_{21}, ν_2 fois par C_{22}.

48. — Les droites fondamentales de θ_{12}. — Soit d_1 une droite fondamentale d'ordre δ de G_1. Il lui correspond, dans G_2, une surface fondamentale (d_1) d'ordre δ, que nous supposerons passer δ_1 fois par C_{21}, δ_2 fois par C_{22} $(\delta = \delta_1 + \delta_2)$. Les surfaces S_1 passent donc δ fois par d_1, et comme ces surfaces, étant au moins en nombre ∞^3, ne peuvent être des quadriques, on a $\delta \leq \nu - 1$.

La surface (P_{21}), transformée par θ_{12} d'un point P_{12} de C_{12}, passe δ_1 fois par d_1. On a donc $\delta_1 \leq \nu_1$, le signe $=$ n'étant valable que si la surface (P_{21}) est une quadrique $(\nu_1 = 1)$.

De même, on a $\delta_2 \leq \nu_2$, le signe $=$ n'étant valable que si $\nu_2 = 1$.

Soit maintenant d_2 une droite fondamentale de G_2. Il lui correspond une surface (d_2) appartenant à G_1, donc d'ordre pair $2\delta'$, passant δ' fois par C_1. On a d'ailleurs δ' inférieur ou au plus égal au plus petit des nombres ν_1, ν_2.

On voit que les droites fondamentales de G_2 sont d'ordre pair.

49. — Premier groupe de formules pour θ_{12}. — Supposons que la congruence G_1 possède x_{11} droites fondamentales simples, ..., $x_{1,\nu-1}$ droites fondamentales d'ordre $\nu - 1$, et que G_2 possède x_{21} droites fondamentales doubles, ..., $x_{2,h}$ droites fondamentales $2h$-uples $(h \leq \nu_1,\ h \leq \nu_2)$.

Exprimons que les sections planes des surfaces S_1 sont rationnelles, et que deux de ces surfaces ne peuvent se rencontrer, en dehors de C_1 et des droites fondamentales de G_1, qu'en $n_2 + 1$ droites de cette congruence. Nous avons, après quelques transformations,

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} i x_{1i} + n_2 = 3\nu - 3, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} i^2 x_{1i} + n_2 = \nu^2 - 1. \tag{2}$$

De même, exprimons que les sections des surfaces S_2 sont rationnelles et que, en dehors des C_{21}, C_{22} et des droites fondamentales de G_2, deux surfaces S_2 se rencontrent en quatre droites ; nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{h} i x_{2i} - 2\nu_1 + (n_2 - 3)\nu_2 + 3 = 0, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{h} i^2 x_{2i} + (n_3 - 1)\nu_2^2 - 2\nu_1\nu_2 + 1 = 0. \tag{4}$$

Enfin, le théorème sur le nombre des droites fondamentales de G_1, G_2, établi au chapitre I, donne actuellement

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} x_{1i} = \sum_{i=1}^{h} x_{2i} + 1. \tag{5}$$

50. — Deuxième groupe de formules pour θ_{12}. — Désignons par x'_{1i} le nombre des droites fondamentales de G_1, multiples d'ordre i pour les surfaces transformées, par θ_{12}, des points de C_{22}, par x''_{1i} le nombre analogue relatif aux transformées par θ_{12} des points de C_{21}.

Exprimons que les sections planes des surfaces (P_{21}), transformées par θ_{12} des points de C_{21}, sont rationnelles et que deux pareilles surfaces ne se rencontrent pas en dehors de C_1 et des droites fondamentales de G_1. Nous avons

$$\sum_{i=1}^{\nu_2} i x'_{1i} = 3\nu_2 - 2, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu_2} i^2 x'_{1i} = \nu_2^2. \tag{7}$$

De même, la considération des transformées des points de C_{21} donne, en remarquant que deux telles surfaces passent par $n_2 - 1$ droites de G_1, que θ_{12} fait correspondre aux droites de G_2 infiniment voisines de C_{21},

$$\sum_{i=1}^{\nu_1} i x''_{1i} + n_2 = 3\nu_1 - 1, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu_1} i^2 x''_{1i} + n_2 = \nu_1^2 + 1. \tag{9}$$

Enfin, désignons par X la somme des produits des multiplicités de chaque droite fondamentale de G_1 pour les transformées par θ_{12} des points de C_{21}, C_{22}, et exprimons que deux de ces surfaces se rencontrent, en dehors de C_1 et de ces droites fondamentales, en une droite; nous avons

$$X + 1 = \nu_1 \nu_2. \tag{10}$$

§ 2. — *La transformation* T_{12} *en général.*

51. — Les courbes singulières de G_1, G_2, comme fondamentales pour T_{12}. — A un point P_1 de C_1, T_{12} fait correspondre une courbe d'ordre ν, située dans un plan passant par a_2 et possédant un point ν_1-uple sur C_{21}, n_2 points ν_2-uples sur C_{22}, un point i-uple sur chacune des x_{2i} droites fondamentales d'ordre $2i$ de G_2. La surface fondamentale (C_1), correspondant à C_1, est d'ordre $3\nu + 2$, passe deux fois par a_2, $3\nu_1$ fois par C_{21}, $3\nu_2$ fois par C_{22} et $3i$ fois par les x_{2i} droites fondamentales d'ordre $2i$ de G_2.

A un point de C_{21} correspond une courbe d'ordre $2\nu_1$, située dans un plan passant par a_1, ayant trois points ν_1-uples sur C_1 et un point i-uple sur x''_{1i} droites fondamentales de G_1 $(i = 1, 2, \ldots, \nu_1)$. La surface fondamentale (C_{21}) correspondant à C_{21} est d'ordre $2\nu_1 + 1$, passe une fois par a_1, ν_1 par C_1 et i fois par x''_{1i} droites fondamentales de G_1.

De même, la surface fondamentale (C_{22}) correspondant à C_2 est d'ordre $2n_2\nu_2 + 1$, passe une fois par a_1, $n_2\nu_2$ fois par C_1 et i fois par x'_{1i} droites fondamentales de G_1 ($i = 1, 2, \ldots, \nu_2$).

52. — Les courbes fondamentales γ_1, γ_2. — La surface fondamentale (γ_1) est d'ordre $n_2 + 1$ et les surfaces S_2 d'ordre $2\nu = 2(\nu_1 + \nu_2)$. Une de ces surfaces S_2 a en commun, avec (γ_1), $2\nu + n_2$ droites de G_2; donc γ_1 est d'ordre $2\nu + n_2$.

De même, (γ_2) est d'ordre 4 et γ_2 est d'ordre $2\nu + 4$.

La courbe γ_1 s'appuie autant de fois sur la cubique gauche C_1 qu'il y a de droites de G_2 communes à (γ_1) et à (C_1). On trouve aisément le nombre $3\nu + 2n_2$.

Le nombre des points d'appui de ν_2 sur C_{21} est égal au nombre des droites de G_2 communes à (γ_2) et à (C_{21}), c'est-à-dire à $2\nu_1 + 3$.

De même, γ_2 s'appuie en $2n_2\nu_2 + 3$.

La courbe γ_1, *d'ordre* $2\nu + n_2$, *s'appuie en* $3\nu + 2n_2$ *points sur* C_1, *en* 2ν *points sur* a_1 *et en* i *points sur* x_{1i} *droites fondamentales de* G_1 ($i = 1, 2. 1, \ldots, \nu - 1$).

La courbe γ_2, *d'ordre* $2\nu + 4$, *s'appuie en* $2\nu_1 + 3$ *points sur* C_{21}, *en* $2n_2\nu_2 + 3$ *points sur* C_{22}, *en* 2ν *points sur* a_2 *et en* $2i$ *points sur* x_{2i} *droites fondamentales de* G_2 ($i = 1, 2, \ldots, h$).

En rapprochant ces résultats de ceux qui ont été établis dans le cas général, on obtient la configuration des courbes fondamentales de Σ_1, Σ_2 pour T_{12}.

53. — Les surfaces F_1, F_2 et les courbes φ_1, φ_2. — Les résultats précédemment obtenus permettent d'énoncer les théorèmes suivants :

Les surfaces F_1, *d'ordre* $2\nu + 1$, *passent une fois par* a_1, ν *fois par* C_1, i *fois par* x_{1i} *droites fondamentales de* G_1 ($i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$), *une fois par la courbe* γ_1.

Les surfaces F_2, *d'ordre* $2\nu + 1$, *passent une fois par* a_2, $2\nu_1$ *fois par* C_{21}, $2\nu_2$ *fois par* C_{22}, $2i$ *fois par* x_{2i} *droites fondamentales de* G_2 ($i = 1, 2, \ldots h$), *une fois par* γ_2:

Les courbes φ_1, *d'ordre* $2\nu + 1$, *s'appuient* 2ν *fois sur* a_1, $3\nu + 2$ *fois sur* C_1, i *fois sur* x_{1i} *droites fondamentales de* G_1, $n_2 + 1$ *fois sur* γ_1.

Les courbes φ_2, *d'ordre* $2\nu + 1$, *s'appuient* 2ν *fois sur* a_2, $2\nu_1 + 1$ *fois sur* C_{21}, $2\,n_2\nu_2 + 1$ *fois sur* C_{22}, $2i$ *fois sur* x_{2i} *droites fondamentales de* G_2, 4 *fois sur* γ_2.

54. — Vérifications. — Exprimons que deux surfaces F_1 ne se rencontrent, en dehors de C_1, a_1, γ_1 et des droites fondamentales de G_1, qu'en une courbe φ_1; nous avons

$$(2\nu + 1)^2 = 1 + 3\nu^2 + \sum_{i=1}^{\nu-1} i^2 x_{1i} + 2\nu + n_2 + 2\nu + 1.$$

Cette relation est vérifiée en vertu de la relation (2).

Exprimons qu'une surface F_2 rencontre une courbe φ_2, en dehors des courbes fondamentales, en un seul point; nous avons

$$(2\nu + 1)^2 = 2\nu + 2\nu_1(2\nu_1 + 1) + 2\nu_2(2n_2\nu_2 + 1) + 4\sum_{i=1}^{h} i^2 x_{2i} + 4 + 1.$$

Cette relation se réduit à la formule (4).

Les surfaces fondamentales de Σ_1 sont : (a_2) d'ordre 2ν, (C_{21}) d'ordre $2\nu_1 + 1$, (C_{22}) d'ordre $2\,n_2\nu_2 + 1$, x_{2i} surfaces d'ordre x_{2i}, (γ_2) d'ordre quatre. Ces surfaces doivent constituer la jacobienne de $|F_1|$; celle-ci est d'ordre 8ν; donc

$$2\nu + 2\nu_1 + 1 + 2n_2\nu_2 + 1 + 2\sum_{i=1}^{h} i x_{2i} + 4 = 8\nu.$$

Cette relation se ramène à la formule (3).

De même, la jacobienne de $|F_2|$, d'ordre 8ν, se compose de (a_1), d'ordre 2ν, de (C_1), d'ordre $3\nu + 2$, de x_{1i} surfaces d'ordre i et de (γ_2), d'ordre $n_2 + 1$. On doit donc avoir

$$2\nu + 3\nu + 2 + \sum_{i=1}^{\nu-1} i x_{1i} + n_2 + 1 = 8\nu,$$

ce qui est une identité en vertu de la formule (1).

§ 3. — *Quelques congruences linéaires de cubiques gauches obtenues au moyen de transformations* T_{12}.

55. — Cas où G_1 possède une droite fondamentale d'ordre $\nu - 2$. — Supposons que la congruence G_1 possède une droite d_1, fondamentale d'ordre $\nu - 2$. Alors, à une droite s'appuyant sur d_1 et C_1 correspond une courbe φ_2 dégénérée en une courbe d'ordre ν correspondant au point d'appui sur C_1, en une courbe d'ordre $\nu - 2$ correspondant au point d'appui sur d_1, et en une cubique gauche φ_2'. Ces cubiques φ_2' forment évidemment une congruence linéaire K_2.

Commençons par observer que G_1 ne peut posséder, en dehors de d_1, aucune droite fondamentale d'ordre trois, car une droite s'appuyant sur celle-ci et sur d_1 et C_1 appartiendrait à toutes les surfaces S_1, ce qui est absurde. Les formules (1), (2) donnent donc

$$x_{11} + 2x_{12} + \nu - 2 + n_2 = 3\nu - 3,$$
$$x_{11} + 4x_{12} + (\nu - 2)^2 + n_2 = \nu^2 - 1.$$

On en déduit $x_{11} = 3 - n_2$, $x_{12} = \nu - 2$; d'où $n_2 \leq 3, \nu \geq 2$.

Remarquons que si $\nu = 2$, d_1 n'est pas fondamentale; si $\nu = 3$, d_1 est simple et il y a, *en plus*, $3 - n_2$ droites simples; si $\nu = 4$, d_1 est double et il y a, *en plus*, $x_{12} = 2$ droites doubles.

A une des x_{12} droites fondamentales doubles correspond une quadrique fondamentale de G_2; celle-ci passe nécessairement une fois par C_{21} et C_{22}; donc les surfaces (P_{21}), (P_{22}) passent chacune une fois par une des droites doubles. D'autre part, si (P_{21}) passe par une des droites simples de G_1, (P_{22}) ne contient pas cette droite. Si nous désignons par δ la multiplicité de d_1 pour les surfaces (P_{22}), nous avons $X = x_{12} + \delta(\nu - 2 - \delta)$ et la formule (10) donne

$$\delta^2 - (\nu_1 + \nu_2 - 2)\delta + \nu_1\nu_2 - \nu_1 - \nu_2 + 1 = 0.$$

On en déduit, pour δ, l'une des valeurs $\nu_1 - 1$ ou $\nu_2 - 1$.

Mais on doit avoir $\delta \leq \nu_2$, $\nu - \delta - 2 \leq \nu_1$ ou $\delta \geq \nu_2 - 2$. La valeur $\delta = \nu_2 - 1$ convient donc toujours. Supposons que $\delta = \nu_1 - 1$ convienne également. Nous avons

$$\nu_2 - 2 \leq \nu_1 - 1 \leq \nu_2.$$

D'autre part, les droites fondamentales autres que d_1 appartenant aux surfaces (P_{22}) sont simples; donc les formules (6) et (7) donnent

$$x'_{11} + \nu_1 = 3\nu_2 - 1, \qquad x'_{11} + \nu_1^2 - 2\nu_1 + 1 = \nu_2^2.$$

Par soustraction, on en déduit $\nu_1(\nu_1 - 3) = \nu_2(\nu_2 - 3)$. En vertu de la double inégalité précédente, on a nécessairement $\nu_1 = \nu_2$. Cela revient à dire que nous pouvons, dans tous les cas, supposer $\delta = \nu_2 - 1$, c'est-à-dire que les surfaces (P_{22}) passent $\nu_2 - 1$ fois par d_1 et les surfaces (P_{21}), $\nu_1 - 1$ fois.

Des formules (6), (7), (8), (9), on déduit alors $x'_{11} = 2\nu_2 - 1$, $x''_{11} = 2\nu_1 - n_2$. Chacun de ces nombres doit être supérieur ou égal à $x_{12} = \nu - 2 = \nu_1 + \nu_2 - 2$; on a donc $\nu_1 \leq \nu_2 + 1$, $\nu_1 \geq \nu_2 + n_2 - 2$.

A un point de C_1 correspond une courbe d'ordre ν ayant un point ν_1-uple sur C_{21}, n_2 points ν_2-uples sur C_{22}, ν points sur a_2, 2 points sur ν_2. A un point de d_1 correspond une courbe d'ordre $\nu - 2$ ayant un point $(\nu_1 - 1)$-uple sur C_{21}, n_2 points $(\nu_2 - 1)$-uples sur C_{22}, $\nu - 2$ points sur a_2. Par suite, les cubiques gauches φ'_2 qui correspondent aux droites s'appuyant sur C_1, d_1, s'appuient en $2\nu_1 + 1 - \nu_1 - (\nu_1 - 1) = 2$ points sur C_{21}, en $2n_2\nu_2 + 1 - n_2\nu_2 - n_2(\nu_2 - 1) = n_2 + 1$ points sur C_{22}, en 2 points sur a_2 et en 2 points sur ν_2. Ces cubiques forment une congruence linéaire K_2 dont la classe est égale au nombre des bisécantes d'une courbe φ_1 s'appuyant sur C_1 et d_1. Or, une courbe φ_1 s'appuie en $\nu - 2$ points sur d_1 et en $3\nu + 2$ points sur C_1. La classe de K_2 est donc égale à $\nu + 2$.

Si la courbe C_{22} est une cubique gauche ($n_2 = 3$), les lignes singulières de la congruence K_2 sont toutes connues. Il serait aisé de voir que lorsque $n_2 = 2$ ou $n_2 = 1$, les cubiques φ'_1 s'appuient sur une ou deux droites fixes (fondamentales) de G_2. On peut du reste remarquer que les droites s'appuyant sur C_1 et d_1 se distribuent en séries ∞^1 sur les quadriques passant par C_1 et d_1; or, à ces quadriques, T_{12} fait correspondre des quadriques passant par C_{21}, C_{22} sur lesquelles se distribuent les cubiques φ'_2 en séries ∞^1. Ces quadriques forment un faisceau dont la base est constituée par C_{21}, C_{22} et, éventuellement, par une ou deux droites s'appuyant sur ces courbes.

Les cubiques gauches s'appuyant en quatre points sur une cubique gauche C_{22}, *en deux points sur une bisécante* C_{21} *de* C_{22}, *en deux points sur une droite* a_2 *et en deux points sur une courbe* γ_2 *d'ordre* $2\nu+4$, *s'appuyant elle-même en* $2\nu_1+3$ *points sur* C_{21}, *en* $6(\nu-\nu_1)+3$ *sur* C_{22} *et en* 2ν *points sur* a_1, *constituent une congruence linéaire de classe* $\nu+2$.

Actuellement encore, on obtient une congruence du même type que celles qui ont été rencontrées au chapitre IV.

56. — Cas où G_2 possède deux droites fondamentales dont la somme des multiplicités vaut $2(\nu-1)$. — Supposons que G_2 possède deux droites fondamentales d_{21}, d_{22}, respectivement d'ordre $2\delta_1$, $2\delta_2$, telles que $\delta_1+\delta_2=\nu-1$. Les surfaces fondamentales (d_{21}), (d_{22}) sont d'ordres $2\delta_1$, $2\delta_1$ et passent δ_1 fois, δ_2 fois par C_1 respectivement. A un point de d_{21} correspond une courbe d'ordre $2\delta_1$ située dans un plan passant par a_1 et ayant trois points δ_1-uples sur C_1; à un point de d_{22} correspond de même une courbe d'ordre $2\delta_2$ située dans un plan passant par a_1 et ayant trois points δ_2-uples sur C_1. Il en résulte qu'à une droite s'appuyant sur d_{21}, d_{22} correspond une courbe φ_1 dégénérée en deux courbes correspondant aux points d'appui sur ces droites et en une courbe φ'_1 d'ordre $2\nu+1-2(\delta_1+\delta_2)=3$. Les courbes φ'_1 sont des cubiques gauches, car elles s'appuient en $3\nu+2-3(\delta_1+\delta_2)=5$ points sur C_1 et en deux points sur a_1.

D'autre part, il ne peut y avoir de droites de (γ_1) passant par un point quelconque de d_{21} ou de d_{22}; par suite, tous les points d'appui d'une courbe φ_1 quelconque sur γ_1 doivent se trouver sur φ'_1 lorsqu'il y a dégénérescence dans le sens indiqué ici. Les cubiques gauches φ'_1 s'appuient donc en n_2+1 points sur γ_1. Mais ces cubiques gauches forment une congruence linéaire K_1; par conséquent, elles s'appuient en dix points au plus sur des courbes fixes et l'on doit donc avoir $n_2 \leq 2$. Nous considérerons uniquement le *cas* $n_2=2$.

Observons qu'une droite s'appuyant sur C_{22}, d_{21}, d_{22} ne peut appartenir à toutes les surfaces S_2; donc $\delta_1+\delta_2+\nu_2 \leq \nu$. On en déduit, en remplaçant $\delta_1+\delta_2$ par $\nu-1$; $\nu_2 \leq 1$; donc, nécessairement, $\nu_2=1$.

Les formules (3) et (4) donnent

$$\sum ix_{2i} = 2\nu_1-2, \qquad \sum i^2x_{2i} = 2\nu_1-2;$$

donc $\Sigma i(i-1)x_{2i}=0$. On en déduit $x_{21}=2\nu_1-2$, $x_{22}=0, \ldots,$ $x_{2h}=0$, $h=1$. Les droites d_{21}, d_{22} sont donc fondamentales d'ordre deux ($\delta_1=\delta_2=1$). Par suite, $\nu-1=\delta_1+\delta_2=2$ et $\nu=3$, $\nu_1=2$. Les surfaces S_2 sont d'ordre six, passent quatre fois par C_{21}, deux fois par C_{22}, deux fois par d_{21}, d_{22}.

Les formules (6) et (7) donnent, actuellement,

$$\sum ix'_{1i} = 1 \qquad \sum i^2x'_{1i} = 1;$$

donc $x'_{11}=1$. Les surfaces (P_{22}), transformées par θ_{12} des points P_{22} de C_{22}, sont des quadriques passant par C_1 et par une droite d_1 de G_1.

Les formules (8) et (9) donnent

$$\sum ix''_{1i} = 3, \qquad \sum ix''_{1i} = 3;$$

d'où $x''_{11}=3$, $x''_{12}=0, \ldots$

Enfin, la formule (10) donne $X=1$. On en conclut donc que les surfaces (P_{21}), transformées des points P_{21} de C_{21}, sont d'ordre quatre et passent deux fois par C_1, une fois par d_1 et par deux droites d_{11}, d_{12} fondamentales simples de G_1.

Portons dans les formules (1), (2), (5) les valeurs $x_{11}=2$, $x_{12}=1$; elles se réduisent à des identités. Les surfaces S_1 sont d'ordre six et passent trois fois par C_1, deux fois par d_1, une fois par d_{11} et d_{12}.

On voit facilement que les cubiques φ'_1 ne s'appuient pas sur ces droites d_1, d_{11}, d_{12}.

La classe de K_1 est égale au nombre de bisécantes d'une courbe φ_2 s'appuyant sur d_{21}, d_{22}. Or φ_2 est d'ordre sept et s'appuie deux fois sur d_{21}, d_{22}. On calcule alors aisément la classe de K_1 que l'on trouve égale à seize.

Les cubiques gauches, s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche C_1, *en deux points sur une droite* a_1 *et en trois points sur une courbe* γ_1 *d'ordre huit s'appuyant elle-même en treize points sur* C_1, *en six points sur* a_1, *constituent une congruence linéaire de classe seize.*

Cette congruence est un cas particulier d'une de celles qui ont été rencontrées par L. Godeaux (*). D'après les résultats de celui-ci, il doit exister un réseau de surfaces du cinquième ordre passant par les courbes singulières de la congruence et tel que deux de ces surfaces ont en commun, outre ces courbes, une cubique de la congruence. Il est aisé de construire ce réseau. Les quadriques passant par C_{21}, d_{21}, d_{22} sont transformées, par T_{12}, en des surfaces du cinquième ordre passant deux fois par C_1, une fois par a_1, une fois par γ_1 et une fois par d_1. Ce sont les surfaces cherchées, comme on s'en aperçoit aisément.

On pourrait trouver d'autres congruences linéaires de cubiques gauches au moyen de transformations T_{12} particulières; bornons-nous à remarquer qu'aux droites s'appuyant sur C_{21} correspondent, outre des courbes d'ordre quatre situées sur (C_{21}), des cubiques gauches s'appuyant deux fois sur a_1, cinq fois sur C_1, une fois sur γ_1 et une fois sur d_1. Par conséquent,

Les cubiques gauches, s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche C_1, *en deux points sur une droite* a_1, *en un point sur une bisécante* d_1 *de* C_1, *en un point sur une courbe* γ_1 *d'ordre*

(*) *Détermination*... (Loc. cit.). La courbe d'ordre 10 rencontrée par L. Godeaux devient ici la courbe $a_1 + \gamma_1 + d_1$.

huit (s'appuyant en treize points sur C_1*, six sur* a_1*, deux sur* d_1*) et en un point sur une courbe d'ordre* $3m+4$ *(s'appuyant en* $5m+6$ *points sur* C_1*, en* $2m+4$ *sur* a_1*, en* $m+2$ *sur* γ_1 *et* $m+1$ *sur* d_1*), constituent une congruence linéaire de classe* $m+5$.

Cette congruence est également un cas particulier d'une autre rencontrée par L. Godeaux. (Voir à ce sujet le chapitre III, § 3 de ce travail.)

La considération des droites s'appuyant sur C_{22} et d_{21} fournirait une congruence linéaire de cubiques gauches analogue.

CHAPITRE VI.

Les transformations T_{33}.

§ 1. — *Étude de la correspondance* θ_{33}.

57. — Sur les surfaces appartenant a une congruence linéaire de droites n'ayant qu'une droite singulière. — Soit C une droite et supposons établie, entre les points de C et les plans passant par C, une correspondance (1, λ). Les faisceaux de droites ayant pour sommets et pour plans des éléments correspondants forment une congruence linéaire G de classe λ.

Une surface R, lieu des droites de G s'appuyant sur une droite, est d'ordre $\lambda+1$ et passe λ fois par C. Deux surfaces telles que R se touchent le long de C, en ce sens qu'une quelconque des λ nappes d'une des surfaces touche une nappe de l'autre le long de C. En abrégé, on dira que ces deux surfaces ont en commun λ droites infiniment voisines de C et que G est constitué par les droites s'appuyant sur C et sur une courbe d'ordre λ, ayant $\lambda-1$ points sur C, réduite aux λ droites infiniment voisines de C.

Considérons une surface F appartenant à G et soit *m* son ordre. Supposons qu'un plan passant par C rencontre F en une courbe d'ordre μ nécessairement dégénérée en μ droites de G. Comme dans un plan passant par C ne se trouve qu'un faisceau de droites de G, ces μ droites passent par un même point de C. Cela étant, par un point de C passent $\lambda\mu$ droites appartenant à F et situées μ par μ dans les λ plans correspondants au point considéré. La droite C est donc multiple d'ordre $\lambda\mu$ pour F et l'on doit avoir $m - \lambda\mu = \mu$, ou $m = (\lambda + 1)\mu$.

Une surface R rencontre F en m droites de G, en dehors de C; donc cette droite absorbe $(\lambda + 1)^2\mu - (\lambda + 1)\mu = \lambda(\lambda + 1)\mu$ intersections. Par raison de symétrie, il faut qu'une nappe de R touche, le long de C, μ fois une nappe de F. En d'autres termes, les surfaces F passent μ fois par chacune des λ droites infiniment voisines de C.

Une droite de G, multiple pour une surface F, a évidemment un ordre de multiplicité au plus égal à μ.

58. — Premier examen de θ_{33}. — Soient données deux droites C_1, C_2 et, entre les points de C_1 et les plans passant par C_1, une correspondance $(1, n_1)$, entre les points de C_2 et les plans passant par C_2, une correspondance $(1, n_2)$. La congruence G_1 sera constituée par les droites des faisceaux ayant pour sommets les points de C_1 et pour plans les plans correspondants. De même, G_2 sera constituée par les faisceaux de droites dont les sommets sont sur C_2 et les plans sont les plans correspondants passant par C_2.

Supposons établie une correspondance birationnelle θ_{33} entre G_1, G_2.

Les surfaces S_1 sont d'ordre $n = (n_1 + 1)\nu_1$ et passent $n_1\nu_1$ fois par C_1, ν_1 fois par les n_1 droites infiniment voisines de C_1.

A un point de C_1, θ_{33} fait correspondre une surface d'ordre $n_1\nu_1$ qui dégénère en n_1 surfaces d'ordre ν_1; chacune de celles-ci correspond à un plan passant par C_1 et elle est donc le lieu des droites que θ_{33} fait correspondre aux droites d'un faisceau de G_1. Nous désignerons par (P_1') une pareille surface d'ordre ν_1.

Deux cas peuvent se présenter :

a) Les surfaces (P'_1) sont des plans passant par C_2 ;

b) Les surfaces (P'_1) sont d'ordre supérieur à un. Alors, on a nécessairement $\nu_1 = (n_2 + 1)\,\nu'_2$ et les surfaces (P'_1) passent $n_2\,\nu'_2$ fois par C_2 et ν'_2 fois par les n_2 droites infiniment voisines de C_2.

Les surfaces S_2 sont d'ordre $n = (n_2 + 1)\,\nu_2$ et passent $n_2\,\nu_2$ fois par C_2, ν_2 fois par les n_2 droites infiniment voisines de C_2. On a donc

$$(n_1 + 1)\nu_1 = (n_2 + 1)\nu_2.$$

Les surfaces (P'_2) de G_1, qui correspondent aux plans passant par C_2, sont dans le premier cas a) des plans, dans le second, des surfaces d'ordre $\nu_2 = (n_1 + 1)\,\nu'_1$ passant $n_1\,\nu'_1$ fois par C_1, ν'_1 fois par les n_1 droites infiniment voisines de C_1.

Dans le cas a) on a donc $\nu_1 = \nu_2 = 1$; d'où $n_1 = n_2$.

Dans le cas b) on a $(n_1 + 1)\,(n_2 + 1)\,\nu'_2 = (n_2 + 1)\,(n_1 + 1)\,\nu'_1$; d'où $\nu'_1 = \nu'_2 = \nu$, $\nu_1 = (n_2 + 1)\,\nu$, $\nu_2 = (n_1 + 1)\,\nu$, $n = (n_1 + 1)\,(n_2 + 1)\,\nu$.

Nous désignerons par θ'_{33} la correspondance obtenue dans le cas b), réservant la notation θ_{33} au cas a).

59. — Étude de la correspondance θ_{33}. — Les surfaces S_1 sont actuellement d'ordre $n_1 + 1$ et se rencontrent, en dehors des droites fondamentales et de C_1, en $n_2 + 1$ droites ; on doit donc avoir

$$(n_1 + 1)^2 - n_1^2 - n_1 - (n_2 + 1) \geq 0,$$

c'est-à-dire $n_1 - n_2 \geq 0$. Mais la considération des surfaces S_2 fournit de même, $n_2 - n_1 \geq 0$; donc on aura $n_1 - n_2$. On en conclut également qu'il ne peut exister de droites fondamentales.

Nous allons montrer que les surfaces S_1 coïncident avec les surfaces R_1. Cela est évident si $n_1 = 1$, car il ne peut exister que ∞^3 quadriques passant par C_1 et par une droite infiniment voisine de C_1 et les surfaces S_1, R_1 coïncident avec ces quadriques. Supposons $n_1 > 1$. Alors les surfaces S_1, comme les surfaces R_1, sont en nombre ∞^4. Il existe donc une surface S_1 ayant un point double en un point Q déterminé de l'espace. La section de cette surface par le plan tangent en Q se compose nécessairement de n_1 droites de G_1 et d'une droite r n'appartenant pas à G_1. Tous les plans passant par r rencontrent la surface en n_1 droites de G_1 ; donc cette surface S_1 coïncide avec la surface R_1 relative à r.

De même les surfaces S_2 coïncident avec les surfaces R_2 ; donc *La correspondance* θ_{33} *s'obtient en rapportant projectivement les surfaces* R_1 *et* R_2.

60. — Les droites fondamentales pour θ'_{33}. — Soit d_1 une droite de G_1 fondamentale d'ordre h pour θ'_{33}.

Si $h = 1$, la surface fondamentale correspondante (d_1) est un plan passant par C_2. Soit y_1 le nombre de ces droites.

Si $h > 1$, on a nécessairement $h = (n_2 + 1)\,h'$ et la surface fondamentale (d_1) correspondante passe $n_2 h'$ fois par C_2 et h' fois par les n_2 droites infiniment voisines de C_2.

61. — Impossibilité de l'existence de θ'_{33}. — Deux surfaces S_1 se rencontrent, en dehors des droites fondamentales de G_1 et de la droite C_1 (en tenant compte des contacts des nappes des surfaces S_1 le long de C_1) en $n_2 + 1$ droites. Désignons par x_{1i} le nombre des droites fondamentales d'ordre $(n_2 + 1)\ i$ de G_1 $(i = 1, 2, \ldots \nu)$. Nous devons donc avoir

$$\left.\begin{aligned} y_1 + \sum_{i=1}^{\nu} i^2 x_{1i}(n_2 + 1)^2 + n_1^2(n_2 + 1)^2\nu^2 + n_1(n_2 + 1)^2\nu^2 + n_2 + 1 &= \\ = (n_1 + 1)^2\,(n_1 + 1)^2\nu^2&, \end{aligned}\right\}$$

c'est-à-dire

$$(n_2 + 1)^2\left[\sum i^2 x_{1i} - (n_1 + 1)\nu^2\right] + y_1 + n_2 + 1 = 0.$$

Mais, d'autre part, les surfaces (P'_2), transformées des plans passant par C_2, ne peuvent passer par les γ_1 droites fondamentales simples de G_1 (puisque ces plans ne peuvent contenir une droite de G_2 située dans un plan fondamental passant par C_2), et elles passent i fois par une droite fondamentale d'ordre $(n_2+1)\,i$ de G_1. Deux surfaces telles que (P_2') ne peuvent se rencontrer en dehors de C_1 et des droites fondamentales de G_1; donc

$$\sum i^2 x_{1i} = (n_1+1)^2\nu^2 - n_1^2\nu^2 - n_1\nu^2 - (n_1+1)\nu^2.$$

Alors l'égalité trouvée plus haut se réduit à $y_1 + n_2 + 1 = 0$, impossible en nombres entiers positifs.

On en conclut que les transformations θ_{33}' ne peuvent exister.

§ 2. — *La transformation* T_{33}.

62. — Les surfaces fondamentales correspondant a C_1, C_2. — A un point P_1 de C_1, θ_{33} fait correspondre n_1 plans passant par C_2 et T_{33} fait correspondre à P_1 la section de ces n_1 plans par le plan de (a_2) qui correspond au plan de (a_1) passant par P_1, c'est-à-dire n_1 droites issues d'un point de C_2. Il importe de remarquer que ces n_1 droites ne sont pas en général des droites de G_2. Lorsque P_1 parcourt C_1, ces n_1 décrivent la surface fondamentale (C_1), correspondant à C_1. Ainsi que nous l'avons vu plus haut (chapitre II), et comme on peut d'ailleurs le voir aisément dans le cas particulier envisagé ici, la surface (C_1) est d'ordre n_1+1 et passe n_1 fois par C_2. Remarquons qu'elle ne passe pas par les droites infiniment voisines de C_2. La surface (C_1) passe une fois par a_2.

De même, la surface fondamentale (C_2) correspondant à C_2 est d'ordre $n_2+1 = n_1+1$, passe n_1 fois par (C_1), une fois par a_1, et ne passe pas par les n_1 droites infiniment voisines de C_1.

63. — Les courbes fondamentales γ_1, γ_2. — Les surfaces F_2 que T_{33} fait correspondre aux plans de Σ_1 sont d'ordre $n+1 = n_1+2$ et passent n_1 fois par C_2, une fois par a_2. Comme les surfaces S_2, ces surfaces F_2 passent également, simplement, par chacune des n_1 droites infiniment voisines de C_2.

La courbe γ_1 est le lieu des points que T_{33} fait correspondre aux droites de G_2 s'appuyant sur a_2. Ces droites forment la surface (γ_1), d'ordre $n_1 + 1$, fondamentales, passant n_1 fois par C_2, une fois par chacune des n_1 droites infiniment voisines de C_2 et une fois par a_2. L'ordre de γ_1 est égal au nombre des points où (γ_1) rencontre une section plane d'une surface F_2, en dehors de a_2 et de C_2 (en tenant compte des contacts dans le domaine de cette droite). On trouve donc pour cet ordre $(n_1 + 2)(n_1 + 1) - n_1^2 - n_1 - 1 = 2n_1 + 1$, comme nous l'avions énoncé plus haut.

Le nombre des points d'appui de γ_1 sur C_1 est égal au nombre des points où (γ_1) rencontre une section plane de (C_1), en dehors de C_2 et a_2. Ici, il n'y a pas contact dans le domaine de C_2. On trouve donc $(n_1 + 1)^2 - n_1{}^2 - 1 = 3n_1$.

Observons maintenant que γ_1 étant tracée sur les surfaces (a_2), (C_2), dont l'une contient les n_1 droites infiniment voisines de C_1 et l'autre pas, la courbe γ_1 s'appuie en $2\,n_1$ points sur l'ensemble de ces droites. En d'autres termes, γ_1 touche les surfaces $S_1 \equiv R_1$, F_1 en $2\,n_1$ points de C_1.

La courbe fondamentale γ_1 *(ou* γ_2*) est d'ordre* $2n_1 + 1$ *et s'appuie en* $2n_1$ *points sur* C_1 *(ou* C_2*), en y touchant les surfaces* F_1 *(ou* F_2*), et en* $n_1 + 1$ *points sur la droite* a_1 *(ou* a_2*).*

64. — Les surfaces F_1, F_2 et les courbes φ_1, φ_2. — Nous avons tout d'abord, d'après ce qui a été établi au chapitre II et ci-dessus, le théorème suivant :

Les surfaces F_1 *(ou* F_2*) sont d'ordre* $n_1 + 2$ *et passent* n_1 *fois par* C_1 *(ou* C_2*), une fois par les* n_1 *droites infiniment voisines de* C_1 *(ou* C_2*), une fois par la droite* a_1 *(ou* a_2*) et une fois par la courbe* γ_1 *(ou* γ_2*) d'ordre* $2n_1 + 1$.

Les courbes φ_1 s'appuient en $n_1 + 1$ points sur C_1 ; mais comme ces courbes sont tracées sur les surfaces F_1, elles doivent nécessairement toucher ces surfaces en chaque point d'appui sur C_1. Par conséquent,

Les courbes φ_1 *(ou* φ_2*), d'ordre* $n_1 + 2$*, s'appuient en* $n_1 + 1$ *points sur* C_1 *(ou* C_2*) et touchent les surfaces* F_1 *(ou* F_2*) en ces* *points, en* n_1+1 *points sur la droite* a_1 (*ou* a_2) *et en* n_1+1 *points sur la courbe* γ_1 (*ou* γ_2).

On vérifie aisément que deux surfaces F_1 se rencontrent, en dehors des courbes fondamentales, en une courbe φ_1, et qu'une surface F_1 et une courbe φ_1 se rencontrent, en dehors des mêmes courbes, en un seul point.

La jacobienne du système linéaire $|F_1|$ est d'ordre $4(n_1+1)$. Elle comprend les trois surfaces (C_2), (γ_2), (a_2) d'ordre n_1+1 chacune. Observons que les courbes φ_2 s'appuient en n_1+1 points sur l'ensemble des n_1 droites infiniment voisines de C_2. Par conséquent, ces droites sont fondamentales et il leur correspond une surface d'ordre n_1+1, infiniment voisine de (C_2). En d'autres termes, dans la jacobienne de $|F_1|$, la surface (C_2) doit être comptée deux fois.

§ 3. — *Congruences linéaires de cubiques gauches.*

65. — Détermination de la seule transformation T_{33} donnant des congruences linéaires de cubiques gauches. — Pour qu'une courbe φ_1 dégénère en un ensemble de courbes dont l'une est une cubique gauche non située sur une surface fondamentale, elle doit correspondre à une droite ne pouvant s'appuyer ni sur C_2, ni sur a_2. En effet, à une droite s'appuyant sur C_2 correspond une courbe φ_1 dégénérée en n_1 droites situées sur (C_2) et en une conique. A une droite s'appuyant sur a_2 correspond une courbe φ_1 dégénérée en une droite et en une courbe d'ordre n_1+1 s'appuyant en n_1+1 points sur a_1, donc plane.

A une droite s'appuyant sur γ_2 correspond une courbe φ_1 dégénérée en une droite de (γ_1) et en une courbe φ_1' d'ordre n_1+1 s'appuyant en n_1 points sur C_1, en n_1 points sur a_1, en n_1+1 points sur γ_1. La courbe φ_1' pourra être une cubique gauche si $n_1=2$.

Pour que l'on puisse avoir ∞^2 cubiques gauches φ_1' formant une congruence linéaire, il faut qu'il existe une congruence linéaire de droites dont γ_2 est une des courbes singulières.

L'autre courbe singulière doit être une droite s'appuyant en quatre points sur γ_2 et cette droite, d, doit être distincte de C_1. Mais alors à d correspond un point de Σ_1, car aux quatre points d'appui de d sur γ_2 correspondent des droites et, actuellement, les courbes φ_1 sont d'ordre quatre. Remarquons que d ne peut s'appuyer sur C_1, car cette droite est aussi une quadrisécante de γ_2. Or, à tout point d'une courbe fondamentale de Σ_1, correspond une droite s'appuyant sur C_1. La droite d ne peut donc correspondre à un point d'une de ces courbes et, par suite, ne peut exister.

De ce qui précède, on conclut qu'on ne pourra trouver ∞^2 courbes de Σ_1, parties de courbes φ_1, qui soient des cubiques gauches et forment une congruence linéaire. Il ne nous restera donc à examiner que le cas où toutes les courbes φ_1 sont des cubiques gauches ($n_1 = 1$).

La seule transformation T_{33} *susceptible de donner des congruences linéaires de cubiques gauches* (*) *correspond en cas* $n_1 = 1$.

66. — Examen du cas $n_1 = 1$. — Lorsque $n_1 = 1$, les surfaces $S_1 \equiv R_1$ constituent l'ensemble des quadriques se raccordant le long de C_1. Par conséquent, les cubiques gauches φ_1 s'appuient en deux points sur la droite a_1, en deux points sur la droite C_1, où elles touchent une quadrique Q_1, en deux points sur une cubique gauche γ_1 touchant Q_1 en deux points de C_1 et s'appuyant en deux points sur a_1.

Considérons, dans Σ_2, une congruence linéaire de droites K_2 de classe m. Aux droites de K_2 correspondent des cubiques gauches φ_1 formant une congruence linéaire K_1. La classe de K_1 est égale au nombre des droites de K_2 bisécante d'une courbe φ_2 (cubique gauche). En général, une courbe φ_2 ne rencontre pas les courbes singulières de K_2; donc la classe de K_1 est égale à $3m + 1$.

(*) Sous-entendu comme transformée d'une congruence linéaire de droites.

Si nous particularisons la congruence K_2, nous obtenons les deux types suivants de congruences linéaires de cubiques gauches :

Les cubiques gauches s'appuyant en deux points sur une droite a_1, *touchant une quadrique* Q_1 *en deux points d'une droite* C_1, *s'appuyant en deux points sur une cubique gauche* γ_1 (*s'appuyant en deux points sur* a_1 *et touchant* Q_1 *en deux points de* C_1) *et en deux points sur une courbe d'ordre neuf* (*s'appuyant en six points sur* a_1, *touchant* Q_1 *en six points de* C_1 *et s'appuyant en six points sur* γ_1) *constituent une congruence linéaire de cubiques gauches de classe dix.*

Les cubiques gauches touchant une quadrique Q_1 *en deux points d'une droite* C_1, *s'appuyant en deux points sur une droite* a_1, *en deux points sur une cubique gauche* γ_1 (*touchant* Q_1 *en deux points de* C_1 *et s'appuyant en deux points sur* a_1), *en un point sur une cubique gauche* H_1 (*touchant* Q_1 *en deux points de* C_1 *et s'appuyant en deux points sur* a_1 *et* γ_1) *et un point sur une courbe* H_2 *d'ordre* 3 m (*touchant* Q_1 *en* 2 m *points de* C_1 *et s'appuyant en* 2 m *sur* a_1 *et* γ_1, *en* m — 1 *points sur* H_1) *constituent une congruence linéaire de cubiques gauches de classe* $3m + 1$.

En obligeant les courbes singulières de K_2 à rencontrer les courbes fondamentales de Σ_2, on obtiendrait des cas particuliers de ces congruences. On pourrait de même s'arranger de manière à ce que H_2 se réduise à m cubiques gauches infiniment voisines de H_1.

On voit aisément que ces congruences sont des cas particuliers de celles obtenues par L. Godeaux (*) et dont les cubiques s'appuient en huit points sur une sextique de genre trois. Ici, cette sextique dégénère en a_1, γ_1, C_1 et une droite infiniment voisine de C_1.

(*) *Nouveaux types*... (Loc. cit.).

CHAPITRE VII.

Impossibilité des transformations T_{13} et T_{23}.

§ 1. — *Impossibilité d'une correspondance* θ_{13}.

67. — Supposons que G_1 soit constituée par les bisécantes d'une cubique gauche C_1 et G_2 par les droites de faisceaux ayant pour centres les points d'une droite C_2, pour plans des plans passant par cette droite, ces points et ces plans étant liés par une correspondance $(1, n_2)$.

A une surface R_1 d'ordre quatre, de G_1, θ_{13} fait correspondre une surface de S_2, de G_2, d'ordre $n = (n_2 + 1)\,\nu_2$, passant $n_2\,\nu_2$ fois par C_2 et ν_2 fois par chacune des n_2 droites infiniment voisines de C_2.

A une surface R_2 de G_2, θ_{13} fait correspondre une surface S_1 de G_1, d'ordre $n = 2\,\nu_1$, passant ν_1 fois par C_1.

La transformée d'un point P_1 de C_1 est une surface (P_1) de G_1, d'ordre $\nu_1 = (n_2 + 1)\,\nu$, passant $n_2\,\nu$ fois par C_2 et ν fois par les n_2 droites infiniment voisines de C_2.

Aux droites de G_2 situées dans un plan passant par C_2, θ_{13} fait correspondre une surface d'ordre $\nu_2 = 2\,\nu'$, passant ν' fois par C_1. On a d'ailleurs $n = (n_2 + 1)\,\nu_2 = 2\,(n_2 + 1)\,\nu' = 2\,\nu_1 = 2\,(n_2 + 1)\,\nu$; d'où $\nu' = \nu$.

68. — Considérons une droite fondamentale d_1 de G_1. Si cette droite est d'ordre un, il lui correspond, dans G_2, un plan fondamental passant par C_2. Soit γ_1 le nombre de ces plans fondamentaux.

Si la droite d_1 est fondamentale d'ordre $h > 1$, il lui correspond, dans G_2, une surface d'ordre $h = (n_2 + 1)\,h'$ passant $n_2\,h'$ fois par C_2, h' fois par chacune des n_2 droites infiniment voisines de C_2. Il en résulte que les surfaces que θ_{13} fait correspondre aux plans passant par C_2 passent h' fois par d_1. Soit x_{1i} le nombre des droites de G_1, fondamentales d'ordre $(n_2 + 1)\,i$.

Exprimons que les surfaces S_1 se rencontrent, en dehors de C_1 et des droites fondamentales de G_1, en n_2+1 droites; nous obtenons

$$y_1+(n_2+1)^2\sum i^2x_{1i}+3(n_2+1)^2\nu^2+n_2+1=4(n_2+1)^2\nu^2,$$

c'est-à-dire

$$y_1+(n_2+1)^2\left[\sum i^2x_{1i}-\nu^2\right]+n_2+1=0.$$

Exprimons maintenant que deux surfaces correspondant à deux plans passant par C_2 ne se rencontrent pas en dehors de C_1 et des droites fondamentales d'ordre supérieur à un de G_1. Nous obtenons

$$\sum i^2x_{1i}=4\nu^2-3\nu^2=\nu^2.$$

On a donc $y_1+n_2+1=0$, équation impossible en nombres entiers positifs; donc la correspondance θ_{13} ne peut exister.

§ 2. — *Impossibilité d'une correspondance* θ_{23}.

69. — Supposons enfin que G_1 soit constituée par les droites s'appuyant sur une droite C_{11} et sur une courbe C_{12}, d'ordre n_1, s'appuyant elle-même en n_1-1 points sur C_{11}; et que G_2 soit constituée par les droites des faisceaux dont les centres se trouvent sur une droite C_2, dont les plans passent par C_2, ces centres et ces plans étant liés par une correspondance $(1, n_2)$.

Aux surfaces R_1 de G_1, θ_{23} fait correspondre dans G_2 des surfaces S_2 d'ordre $n=(n_2+1)\nu_2'$, passant $n_2\nu_2'$ fois par C_2, ν_2' fois par les n_2 droites infiniment voisines de C_2.

Aux surfaces R_2 de G_2, θ_{23} fait correspondre des surfaces S_1 de G_1, d'ordre $n=\nu_1+\nu_2$, passant ν_1 fois par C_{11}, ν_2 fois par C_{12}.

La transformée (P_{11}) par θ_{23} d'un point P_{11} de C_{11} est une surface d'ordre ν_1 qui peut être soit un plan passant par C_2, soit une surface d'ordre $\nu_1=(n_2+1)\nu_{11}$ passant $n_2\nu_{11}$ fois par C_2 et ν_{11} fois par chacune des n_2 droites infiniment voisines de C_2.

La transformée (P_{12}) par θ_{23} d'un point P_{12} de C_{12} est une surface d'ordre ν_2 pouvant être, soit un plan passant par C_2, soit une surface d'ordre $\nu_2=(n_2+1)\nu_{12}$ passant $n_2\nu_{12}$ fois par C_2, ν_{12} fois par les droites infiniment voisines.

Il est évident que l'on ne peut avoir en même temps $\nu_1=\nu_2=1$, les surfaces (P_{11}), (P_{12}) ne pouvant coïncider et n_2 étant au moins égal à l'unité. Nous avons donc trois cas à examiner :

70. — ν_1 ET ν_2 SONT SUPÉRIEURS A L'UNITÉ. — Dans ce cas, θ_{23} fait correspondre aux droites d'un faisceau de G_2 une surface (P'_2), d'ordre ν'_2, passant ν_{11} fois par C_{11}, ν_{12} fois par C_{12}. On a donc $\nu'_2=\nu_{11}+\nu_{12}$.

Soient y_1 le nombre des droites fondamentales simples de G_1, x_{1i} le nombre des droites fondamentales d'ordre (nécessairement) $(n_2+1)i$ de G_1.

En exprimant que les surfaces S_1 se rencontrent en n_2+1 droites variables et que les surfaces (P'_2) ne se rencontrent en aucune droite variable, on trouve

$$y_1+(n_2+1)^2\left[\sum i^2x_{1i}+\nu_{11}^2+n_1\nu_{12}^2-(\nu_{11}+\nu_{12})^2\right]+n_2+1=0.$$

$$\sum i^2x_{1i}+\nu_{11}^2+n_1\nu_{12}^2-(\nu_{11}+\nu_{12})^2=0.$$

On en déduit $y_1+n_2+1=0$ et, par conséquent, l'impossibilité d'une transformation θ_{23}.

71. — L'UN DES NOMBRES ν_1, ν_2 EST ÉGAL A L'UNITÉ. — Dans ce cas, celui des nombres ν_1, ν_2 qui n'est pas égal à l'unité est multiple de n_2+1. D'autre part, on a $n=\nu_1+\nu_2=(n_2+1)\nu'_2$. On devrait donc avoir

$$(n_2+1)\nu'_2=(n_2+1)\varepsilon+1,$$

ε étant un entier positif. On ne peut avoir $\varepsilon=\nu'_2$ et n_2 est supérieur à zéro. Nous arrivons donc à une absurdité et la correspondance θ_{23} ne peut exister.