SUR LES SURFACES DU QUATRIÈME ORDRE CONTENANT CERTAINES COURBES RATIONNELLES,

PAR

LUCIEN GODEAUX

Les recherches de M. Severi sur la base pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique l'ont conduit à un théorème important sur les surfaces régulières possédant des transformations birationnelles en elles-mêmes [1]). Ce théorème est particulièrement utile lorsque l'on cherche à reconnaître si une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et de nombre-base ρ égal à deux, possède des transformations birationnelles en elle-même. Il résulte en effet du théorème de M. Severi dont il est question plus haut, que si F est une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) dont une base-minima est constituée par deux courbes C_1, C_2, qui admet une transformation birationnelle en elle-même T, il correspond à celle-ci une substitution automorphe de la forme arithmétique

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2) = n_{11}\lambda_1^2 + 2n_{12}\lambda_1\lambda_2 + n_{22}\lambda_2^2,$$

n_{11}, n_{22} étant respectivement les degrés de C_1, C_2, n_{12} le nombre de points communs à ces deux courbes. Mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

En d'autres termes, le groupe des transformations birationnelles de F en elle-même et un sous-groupe de substitutions automorphes de $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$ sont en isomorphisme holoédrique (en général).

---

[1]) *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica*, Math. Annalen, 1905, Bd. LXII, p. 194. — *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique*, Annales de l'Ecole Norm. Sup., 1908 (3), XXV, p. 449. — *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica*, Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 1910, XXX, p. .

Deux surfaces du quatrième ordre sans courbes multiples (donc de genres un) ont été étudiées par ce procédé. L'une étudiée par M.M. Fano [1]) et Severi [2]) contient une courbe gauche d'ordre six et de genre deux. Elle possède une infinité discontinue d'involutions d'ordre deux, rationnelles, et le produit de deux transformations déterminées par deux de ces involutions, est une transformation non périodique. La deuxième surface a fait l'objet d'une note que j'ai publiée récemment [3]). Elle contient une sextique de genre trois et possède une infinité discontinue de transformations involutives engendrant des involutions de genres un, et le produit de deux de ces transformations est non périodique

J'ai pu construire depuis quatre surfaces du quatrième ordre pour lesquelles $\rho = 2$ qui ne possèdent pas de transformations birationnelles en elles-mêmes. Ce sont des surfaces possédant des courbes rationnelles d'ordre $2n$ $(0 < n \leq 4)$ respectivement. C'est à l'exposition de mes recherches sur ce sujet qu'est consacrée cette note. J'établis d'une manière précise le théorème suivant:

Une surface du quatrième ordre, assujetie à la seule condition de contenir une courbe gauche rationnelle d'ordre $2n$ $(0 < n \leq 4)$, *ne possède aucune transformation birationnelle en elle-même.*

J'avais déjà établi ailleurs, il y a quelques années, que dans le cas $n = 1$, la surface ne contient pas de transformations involutives [4]).

1. Nous commencerons par calculer le nombre des modules dont dépend une surface du quatrième ordre assujetie à la seule condition de contenir une courbe rationnelle (générale) d'ordre $2n$ de S_3 $(1 \leq n \leq 4)$.

Les surfaces du quatrième ordre de l'espace découpent, sur une courbe rationnelle C_{2n} d'ordre $2n$ une série linéaire g_{8n}^{8n}. Par conséquent, celles qui contiennent une pareille courbe *assignée*

---

[1]) *Sopra alcune superficie del 4⁰ ordine rappresentabili sul piano doppio*, Rend. R. Ist. Lomb., 1906 (2), XXXIX.

[2]) *Complementi* .... loc. cit.

[3]) *Sur la surface du quatrième ordre contenant une sextique gauche de genre trois*, Bull. de l'Acad. des Sc. de Cracovie, 1913, p. 529.

[4]) *Sur la surface du quatrième ordre contenant une conique*, Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut, 1912, XLII.

sont en nombre ∞^{33-8n}. Or, les courbes rationnelles d'ordre $2n$ de l'espace sont en nombre ∞^{8n} [1]), donc il y a ∞^{33} surface du quatrième ordre contenant une telle courbe, *la position de celle-ci n'étant pas assignée* et, d'autre part, une courbe rationnelle appartenant à une surface d'ordre quatre (et de genres un) étant isolée.

Une surface du quatrième ordre dépend de 19 modules [2]) et nous voyons que contenir une courbe rationnelle d'ordre $2n$ ($1 \leq n \leqq 4$) pour une telle surface équivaut à une condition; par conséquent *la surface F d'ordre quatre, assujetie à la seule condition de contenir une courbe rationnelle d'ordre* $2n$ ($0 < n \leqq 4$), *dépend de dix-huit modules.*

2. Indiquons par C_1 une section plane de F, par C_2 la courbe rationnelle d'ordre $2n$ qu'elle contient. On sait qu'une surface du quatrième ordre générale ne contient que des courbes intersections complètes avec d'autres surfaces. Par conséquent, une surface du quatrième ordre telle que F ne contiendra que des courbes intersections avec des surfaces passant par C_2. En d'autres termes, le nombre-base de F sera $\rho = 2$ et C_1, C_2 formeront une base de déterminant $-4(n^2+2)$.

Supposons que ce ne soit pas une base minima. Alors, si Δ est, en valeur absolue, le déterminant d'une base-minima formée par deux courbes Γ_1, Γ_2, Δ divisera $-4(n^2+2)$. On aura donc les cas suivants:

Pour $n = 1$, $\Delta = 1, 2, 3, 4, 6.$
Pour $n = 2$, $\Delta = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12.$
Pour $n = 3$, $\Delta = 1, 2, 4, 11, 22.$
Pour $n = 4$, $\Delta = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36.$

Désignons par V_{11} le degré de Γ_1, par V_{22} celui de Γ_2, par V_{12} le nombre de points communs à Γ_1 et Γ_2. On doit avoir

$$V_{11} V_{22} - V_{12}^2 = -\Delta.$$

V_{11} et V_{22} étant pairs, Δ doit être congruent à 0 ou à 1 par rapport à quatre.

---

1) Voir HALPHEN, *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques*, Journal de l'Ecole Polytechnique, 1882, LII.

2) Voir ENRIQUES, *Le superficie di genere* 1, Rend. R, Accad. di Bologna, 1908--1909. — SEVERI, *Le superficie algebriche con curve canonica d'ordine zero.* Atti R. Ist. Veneto, 1908—1909.

D'autre part, $+4(n^2+2)$ n'est pas un carré parfait, donc d'après un théorème de M. SEVERI [1]), F ne contient pas de courbes elliptiques et Δ ne peut donc jamais être un carré parfait.

Enfin, remarquons qu'il résulte des formules de M. SEVERI [2]) que le rapport $\dfrac{-4(n^2+2)}{\Delta}$ doit être un carré parfait.

Il reste donc deux cas possibles: $n=4$, $\Delta=8$; $n=4$, $\Delta=18$. Nous examinerons successivement ces deux hypothèses.

Supposons en premier lieu que les courbes Γ_1, Γ_2 forment une base de déterminant -18 $(n=4)$. En partant d'une base de déterminant -72 dont les courbes satisfont à certaines conditions, nous pouvons, en suivant un procédé indiqué par M SEVERI [3]), construire une base de déterminant moindre et précisement, dans le cas actuel, de déterminant -18.

Considérons la courbe

$$C_3 \equiv 4C_1 + C_2.$$

Elle est rationelle, d'ordre 8 et découpée par une surface du quatrième ordre passant par C_2. Considérons ensuite la courbe

$$C_4 \equiv C_1 + C_2.$$

Elle est d'ordre 12, de genre 10 et est découpée sur F par une surface d'ordre cinq passant par C_3. En effet, on a

$$C_4 \equiv C_1 + C_2 \equiv 5C_1 - C_3.$$

Considérons la base formée par C_1 et C_4. Elle est de déterminant -72 et de plus:

1⁰) L'ordre de ses courbes est supérieur à celui (zéro) des courbes canoniques de F,

2⁰) La dimension virtuelle (égale ici à l'effective) de chacun des systèmes $|C_1|$, $|C_4|$ est positive,

3⁰) Les multiples d'ordre assez élevé de $|C_1|$, $|C_4|$ renferment (partiellemont) tout système donné d'avance.

Dans ces conditions, on peut appliquer le raisonnement de M. SEVERI.

Soit une courbe

$$\lambda C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_4,$$

et $\theta\,(<\lambda)$ le plus grand commun diviseur de λ, λ_1.

---

[1]) SEVERI, *Complementi* .... loc. cit.

[2]) SEVERI, *La base per la totalità* .... loc. cit. (form. 19).

[3]) SEVERI, *La base minima* .... loc. cit. (§ 1).

Déterminons deux entiers μ, μ_1 par la condition

$$\lambda\mu + \lambda_1\mu_1 = \theta.$$

Considérons alors les courbes

$$\Gamma_1 \equiv \mu C_1 + \mu_1 C + k \,.\, C_4, \quad \Gamma_2 \equiv C_4,$$

k étant un entier choisi de manière que Γ_1 existe effectivement, c'est-à-dire que Γ_1 soit d'ordre positif et de degré positif ou nul [1]).

Les courbes Γ_1, Γ_2 forment une base de déterminant $-\Delta = -18$ lié au déterminant de la base (C_1, C_4) par la relation

$$18\lambda^2 = 72 \,.\, \theta^2.$$

On a donc $\lambda = \pm 2\theta$. De plus, l'entier $\frac{\lambda_1}{\theta}$ est impair, sans quoi θ ne serait pas le plus grand commun diviseur de λ, λ_1. Posons, ε étant entier,

$$\lambda_1 = (2\varepsilon + 1)\theta.$$

On aura par conséquent

$$\pm 2\mu + (2\varepsilon + 1)\mu_1 = 1,$$

et on pourra prendre $\mu = \mp \varepsilon$, $\mu_1 = 1$. Alors,

$$\Gamma_1 = \mp \varepsilon C_1 + C + kC_4.$$

Le degré virtuel de C est égal à

$$(2\varepsilon + 1)^2 + 6(2\varepsilon + 1)\frac{\lambda_2}{\theta} + 9\frac{\lambda_2^2}{2\theta^2}.$$

On en conclut que λ_2 est divisible par θ et que le rapport est pair. Posons $\lambda_2 = 2\theta\eta$. Le degré de C s'écrit

$$(2\varepsilon + 1)^2 + 12(2\varepsilon + 1)\eta + 18\eta^2.$$

Or, le degré virtuel d'une courbe de F est toujours pair. Cela est impossible pour C, donc C n'existe pas, c'est-à-dire qu'on ne peut trouver C de manière à avoir $\theta < \lambda$. L'hypothèse $\Delta = 18$ doit donc être exclue.

L'hypothèse $\Delta = 8$ se rejette de la même manière. On trouve cette fois $\lambda = \pm 3\theta$ et par suite, $\lambda_1 = (3\varepsilon \pm 1)\theta$. Le degré de C est exprimé par

$$\frac{4(3\varepsilon \pm 1)^2}{9} + 8(3\varepsilon \pm 1)\frac{\lambda_2}{3\theta} + 2\frac{\lambda_2^2}{\theta^2}.$$

---

[1]) SEVERI, *Complementi* .... loc. cit. (no. 7).

On ne peut avoir que $\theta = 3$. Mais alors, l'expression $\lambda_2^2 \pm 4\lambda_2 + 2$ devrait être multiple de trois, ce qui est impossible.

Nous voyons donc, en résumé, que quel que soit n:

Les courbes C_1, C_2 forment une base-minima.

3. Toute courbe C de F est liée aux courbes C_1, C_2 de la base-minima par la relation symbolique

$$C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2.$$

Le genre π de C est donné par la relation

$$2\pi - 2 = 4\lambda_1^2 + 4n\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2,$$

c'est-à-dire par

$$\pi - 1 = 2\lambda_1^2 + 2n\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2.$$

Supposons que la courbe C soit rationnelle. Alors, $\pi = 0$ et

$$2\lambda_1^2 + 2n\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2 = -1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Nous savons que pour qu'une courbe C quelconque existe sur F, il suffit que son ordre soit positif et son degré positif ou nul [1]). Or le degré d'une courbe C rationnelle tracée sur F est égal à -2. Il ne suffira donc pas d'avoir une solution de l'équation (1) pour pouvoir affirmer l'existence d'une courbe rationnelle.

Une première condition pour que la courbe rationnelle C existe, est que son ordre soit positif, c'est-à-dire que le nombre de ses intersections avec C_1 soit positif. On obtient ainsi l'inégalité

$$2\lambda_1 + n\lambda_2 > 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nous distinguerons trois cas:

a) $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ (sauf le cas $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$).

b) $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \leq 0$.

c) $\lambda_1 \leq 0$, $\lambda_2 \geq 0$.

Le premier cas conduit à une absurdité. En effet, si λ_1 et λ_2 sont tous deux positifs, le système linéaire

$$|\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2|$$

a certainement la dimension supérieure à zéro. Il suffit en effet

---

[1]) Severi, *Complementi* .... loc. cit. (no. 7).

de prendre deux courbes C_1 différentes; de les compter λ_1 fois chacune et d'y adjoindre λ_2 fois C_2. On obtient ainsi deux courbes du système considéré; elles déterminent un faisceau (au moins) de courbes de ce système Mais alors, F contiendrait un faisceau (linéaire puisque F est régulière) de courbes rationnelles et serait ainsi rationnelle, ce qui est impossible.

Passons au deuxième cas. Une solution s'aperçoit immédiatement. C'est $\lambda_1 = n$, $\lambda_2 = -1$. La courbe

$$C_3 \equiv nC_1 - C_2$$

correspondante existe certainement, elle est découpée sur F par la surface d'ordre n passant par C_2.

Supposons maintenant que λ_1, λ_2 ne prennent par ces valeurs et posons $\lambda_2 = -k$, k étant un nombre positif. L'inégalité (2) donne $nk < 2\lambda_1$.

On a identiquement

$$C \equiv \lambda_1 C_1 - kC_2 \equiv (\lambda_1 - nk)C_1 + kC_3.$$

Pour que cette courbe existe, il faut que l'on ait $\lambda_1 - nk \leq 0$, car dans le cas contraire, on prouverait, comme dans le premier cas, qu'il y aurait un faisceau (au moins) de courbes $(\lambda_1 - nk)C_1 + kC_2$, ce qui est impossible. Nous devons donc avoir $nk \geq \lambda_1$. Or, de (1), on déduit

$$nk = \frac{1}{2\lambda_1} 2\lambda_1^2 - k^2 + 1).$$

Par conséquent, on doit avoir

$$2\lambda_1^2 \leq 2\lambda_1^2 - k^2 + 1,$$

ou $k^2 < 1$, ou encore $k = 0$ ou 1. Nous avons exclu tantôt la valeur $k = 1$ (c'est-à-dire $\lambda_2 = -1$) qui correspond à la courbe C_3. Si d'autre part, ou avait $k = 0$, (1) donnerait $2\lambda_1^2 = 1$, ce qui est absurde.

Le deuxième cas ne peut donc se présenter que pour la courbe C_3.

Passons au troisième cas: $\lambda_1 \leq 0$, $\lambda_2 \geq 0$. Posons $\lambda_1 = -k$. La formule (1) nous donne

$$2k^2 = \lambda_2^2 + 2nk\lambda_2 - 1$$

et l'inégalité (2),

$$2k < n\lambda_2.$$

On en déduit

$$\lambda_2^2 + nk\lambda_2 < 1,$$

ce qui est impossible, sauf pour $\lambda_2 = 0$. Mais nous avons déjà vu que l'hypothèse $\lambda_2 = 0$ conduisait à l'égalité absurde $2\lambda_1^2 = -1$; par suite, le troisième cas ne peut se présenter

En résumé:

La surface F contient deux courbes rationnelles C_2, C_3, d'ordre 2n, *qui forment l'intersection complète de F avec une surface d'ordre* n $(1 \leq n \leq 4)$, *et ne contient que celles-là.*

4. M. SEVERI a démontré [1]) que si une surface possède une transformation birationnelle en elle-même, il correspond à celle-ci une substitution automorphe de la forme quadratique fondamentale de cette surface

Actuellement, la forme quadratique fondamentale de F est

$$\phi(\lambda_1, \lambda_2) = 2\lambda_1^2 + 2n\lambda_1\lambda_2 - \lambda_2^2.$$

Supposons que F possède une transformation birationnelle non périodique en elle-même, T. D'après le théorème de M. SEVERI, il correspondra à T une substitution automorphe non périodique de $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$. On sait qu'une telle substitution

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

est donnée par les formules [2])

$$\alpha = t - nu, \ \beta = u, \ \gamma = 2u, \ \delta = t + nu \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

t et u étant deux entiers liés par l'équation

$$t^2 - (n^2 + 2)u^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$(\alpha\delta - \beta\gamma = 1).$$

Si nous désignons par Γ_1, Γ_2 les courbes qui correspondent respectivement à C_1, C_2 dans la transformation T, nous avons [3])

$$\Gamma_1 \equiv \alpha C_1 + \gamma C_2,$$
$$\Gamma_2 \equiv \beta C_1 + \delta C_2.$$

Mais la courbe Γ_2 est rationnelle, puis qu'elle correspond

---

[1]) SEVERI, *Complementi* .... loc cit. (no. 6).

[2]) Voir par exemple: CAHEN, *Eléments de la Théorie des Nombres.* Paris, Gauthier-Villars, 1900.

[3]) SEVERI, *Complementi* .... loc. cit. (no. 6).

point par point à C_2. La surface F ne possédant que les deux courbes rationnelles C_2, C_3, Γ_2 doit coïncider soit avec C_2, soit avec C_3.

Si Γ_2 coïncidait avec C_2, on aurait $\beta = 0$, c'est-à-dire, puisque $\beta = u$, $u = 0$. (4) donne alors $t = \pm 1$ et les (3) donnent à leur tour $\alpha = \pm 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = \pm 1$.

Par conséquent, T transformerait $| C_1 |$ en lui-même, puisque $\alpha = \pm 1$ (et précisement $+ 1$, car Γ_1 doit être une courbe effective). Or, nous savons, par un théorème classique d'ENRIQUES et FANO, que si une surface est transformée en elle-même par une homographie non périodique, elle est rationnelle ou référable à une réglée. Si T transformait donc les sections planes C_1 de F en des sections planes, ce serait une homographie (non périodique par hypothèse) et F ne serait plus de genres un. Donc Γ_2 ne peut coïncider avec C_2.

Si Γ_2 coïncidait avec C_3, on aurait $\beta = 2$, $\delta = - 1$, c'est-à-dire, par les formules (3), $u = n$, $t + n^2 = - 1$. L'équation (1) deviendrait alors une identité. Enfin, on aurait

$$\alpha = -(2n^2 + 1),\ \beta = n,\ \gamma = 2n,\ \delta = - 1.$$

La courbe Γ_1 serait donnée par l'égalité symbolique

$$\Gamma_1 \equiv -(2n^2 + 1) C_1 + 2n C_2,$$

et serait donc d'ordre négatif. Cette courbe serait donc inexistante. Par conséquent, Γ_2 ne peut coïncider avec C_3

On en conclut que:

La surface F ne possède pas de transformation birationnelle non périodique en elle-même.

5. Sopposons actuellement que F possède une transformation birationnelle cyclique en elle-même, θ. A θ correspondra une substitution automorphe

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

de $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$, telle que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = - 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

On sait que l'on a alors $\alpha + \delta = 0$ et que θ est précisément involutive. On doit avoir, en désignant par Γ_1, Γ_2 les courbes que θ fait correspondre respectivement à C_1, C_2,

$$\Gamma_1 \equiv \alpha C_1 + \gamma C_2,$$
$$\Gamma_2 \equiv \beta C_1 + \delta C_2.$$

En expriment que Γ_1 a le même genre que C_1, on obtient l'équation

$$2\alpha^2 + 2n\alpha\gamma - \gamma^2 = 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

La courbe rationnelle Γ_2 doit coïncider soit avec C_2, soit avec C_3.

a) Γ_2 coïncide avec C_2. On a $\beta = 0$, $\delta > 0$. De (5) on déduit $\alpha\delta = -1$. D'autre part, on a

$$\alpha + \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

donc $\alpha = -1$, $\delta = +1$. (6) donne alors $\gamma = 0$ ou $\gamma = -2n$. Dans les deux cas, il correspond à C_1 une courbe Γ_1 dont l'ordre est négatif. Cette courbe n'existe donc pas et par suite, Γ_2 ne peut coïncider avec C_2.

b) Γ_2 coïncide avec C_3. On a $\beta = 2$, $\delta = -1$. (7) donne $\alpha = 1$. (6) donne $\gamma = 2n$ ou $\gamma = 0$ et enfin (5) donne $\gamma = 0$. On a donc

$$\Gamma_1 \equiv C_1, \qquad \Gamma_2 = 2C_1 - C_2 \equiv C_3.$$

Mais M. SEVERI a démontré que si une surface d'ordre quatre est invariante pour une homographie involutive, elle dépend au plus de onze modules [1]). Or, si on a $\Gamma_1 \equiv C_1$ pour θ, θ est une homographie et F dépend au plus de onze modules. Cela est absurbe, puisque, par construction, F dépend de dix-huit modules. Γ_2 ne peut donc coïncider avec C_3.

La surface F ne possède pas de transformations périodiques et birationnelles en elle-même.

---

[1]) SEVERI, *Complementi* .... loc. cit. (no. 12).