GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.— LUCIEN GODEAUX, *Sur les surfaces algébriques possédant des involutions douées d'un nombre fini de points unis.* Note présentée par M. ȚIȚEICA, M.A.R., dans la séance du 3 avril 1914.

1.—Une involution doublement infinie, appartenant à une surface algébrique F, possède soit une courbe lieu de points unis, soit un nombre fini de points unis. J'ai étudié récemment celles qui jouissent de cette dernière propriété et j'ai démontré le théorème suivant:

Si une involution appartenant à une surface algébrique, ne possède qu'un nombre fini de points unis, cette involution est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même [1].

Envisageant ensuite plus spécialement le cas où l'ordre de cette involution est un nombre premier p, et en désignant respectivement par $\pi^{(1)} \geqslant 1$, π_a les genres linéaire et arithmétiques d'une surface réprésentant l'involution, par $p^{(1)} \geqslant 1$, p_a les caractères analogues de F, j'ai établi les formules [2]:

$$p(\pi^{(1)}-1)=p^{(1)}-1,$$

$$(p^2-1)\,x=12\,p(\pi_a+1)-12(p_a+1),$$

x étant le nombre de points unis. Il s'ensuit que p dépend des genres linéaires et arithmétiques.

Les recherches de MM. ENRIQUES et SEVERI sur les

---

(1) *Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 1°. sem. 1914.

(2) *Comptes Rendus*, 1-er sem. 1914.

*

surfaces hyperelliptiques [1], celles de M. Enriques [2] et les miennes [3] sur les surfaces de genres un, les miennes sur surfaces de genre zéro et de bi-genre un [4] faisaient d'ailleurs prévoir ces résultats. Je voudrais montrer dans ce travail que l'on ne pourra pas trouver une limite plus restreinte pour p, c'est-à-dire que l'on pourra toujours construire des surfaces F pour lesquelles p sera aussi grand qu'on le voudra.

2. — Soit F la surface représentée par l'équation

$$z^p = \sum_{i=0}^{n} y^{ip} f_{(n-i)p}(x),$$

où p est est un nombre premier et où les fonctions $f_0(x)$, $f_p(x)$, ..., $f_{np}(x)$ sont des polynômes en x dont les degrés sont égaux aux indices.

Cette surface admet la transformation birationnelle T en elle-même, représentée par les formules

$$\text{(T)} \qquad x' = x, \quad y' = \varepsilon y, \quad z' = \varepsilon z$$

où ε est une racine primitive d'indice p de l'unité.

La transformation T a la période p et engendre donc une involution I_p, d'ordre p; les points d'un groupe de cette involution sont représentés par

$$(x, y, z), (x, \varepsilon y, \varepsilon z), (x, \varepsilon^2 y, \varepsilon^2 z), \ldots, (x, \varepsilon^{p-1} y, \varepsilon^{p-1} z)$$

Les points unis de I_p sont ceux pour lesquels $y = \varepsilon y$, $z = \varepsilon z$, c'est-à-dire pour lesquels on a, soit $y = z = 0$, soit $y = z = \infty$. On vérifie aisément que ces points unis

(1) *Acta Mathematica,* 1909, t. XXXII, XXXIII.

(2) *Rendiconti R. Accad. di Bologna*, marzo 1910.

(3) *C. R.* 2-e sem. 1912, 1-er sem. 1913; *Bull. Acad. r. de Belgique* 1913. Un mémoire sur ce sujet paraîtra prochainement dans les *Annales de l'Ecole Normale supérieure.*

(4) *C. R.* 1-er sem 1913; *Bull. Soc. Math. France,* 1914; *Bull. Sect. Scient. Académie Roumaine,* 1913.

sont au nombre de $(n+1)p$, à savoir les np points de rencontre de F avec l'axe des x et les p points de rencontre, en dehors du point $x=y=0$, $z=\infty$ de F avec l'axe à l'infini du plan $x=0$.

Les nombres n et p sont arbitraires, donc on ne pourra pas trouver une limite supérieure de p ne dépendant pas des caractères de la surface F.

3. — On peut calculer p_a, $p^{(1)}$, π_a *et* $\pi^{(1)}$.

La courbe $$\sum_{i=0}^{n} y^{ip} f_{(n-i)p}(x)=0$$

n'a en général aucun point singulier, donc on a [2]:

$$p_a=p_g=\frac{1}{12}p(p-1)\,n(2\,np-n-9)+p-1,$$

$$p^{(1)}=p\left[(p-1)\,n-3\right]^3+1.$$

Les formules rappelées ci-dessus donnent alors:

$$\pi_a=\pi_g=\frac{1}{12}(p-1)\left[n^2(2\,p-1)+n(p-8)+p+1\right],$$

$$\pi^{(1)}=\left[(p-1)\,n-3\right]^3+1.$$

---

(1) *Rendiconti della R. Acad. dei Lincei,* 1°. sem. 1914.

(2) **Battasso,** *Atti di Torino,* 1909, t. XL—IV.