O pewnych powierzchniach algebraicznych, których dzielnik jest większy od jedności. — Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité.

Note

de M. **LUCIEN GODEAUX,**

présentée, dans la séance du 6 Juillet 1914, par M. K. Żorawski m. c.

Les recherches de M. Severi sur la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique l'ont conduit à introduire un nouveau caractère des surfaces algébriques: le diviseur σ[1]). Ce nombre est défini comme étant le maximum du nombre des systèmes complets distincts équisousmultiples d'un même système.

M. Severi avait donné deux exemples de surfaces algébriques ayant un diviseur supérieur à l'unité; ce sont la surface de genres zéro et de bigenre un, considérée par M. Enriques et les surfaces hyperelliptiques irrégulières de genre géométrique zéro.

Dans ce travail, je me propose de montrer comment on peut construire des modèles projectifs de surfaces algébriques pour lesquelles $\sigma > 1$. A cet effet, je considère des surfaces possédant des involutions dépourvues de points de coïncidence. J'établis que:

Si une surface régulière représente une involution d'ordre premier p, dépourvue de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique, son diviseur est multiple de p.

[1]) Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica. Math. Annalen, 1906, LXII, pp. 194—225.

La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique. Annales de l'Ecole Normale, 1908, (3), XXV, pp. 449—468.

Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica. Rend. Circolo Matem. di Palermo, 1910, XXX, pp. 265—288.

Il est toujours possible de construire de pareilles surfaces; c'est ainsi que je démontre que:

Le plan double dont la courbe de diramation se compose des quatre côtés d'un quadrilatère complet et d'une courbe passant le même nombre de fois par deux sommets opposés du quadrilatère et telle qu'un côté du quadrilatère ne la rencontre pas en dehors des sommets, est une surface dont le diviseur est pair.

Il sera possible de construire d'autres exemples intéressants, je me réserve d'y revenir plus tard.

1. Considérons une surface algébrique F sur laquelle il existe une involution I_p, ∞^2, d'ordre p, dépourvue de points de coïncidence. Pour plus de simplicité, nous supposerons p premier. Soit Φ une surface (algébrique), image de cette involution I_p.

D'après un théorème que nous avons établi récemment [1]), l'involution I_p est engendrée par un groupe de p transformations birationnelles de la surface F en elle-même. Actuellement, p étant premier, ces p transformations sont les p premières puissances d'une même transformation T.

Soient respectivement p_a, $p^{(1)}$, π_a, $\pi^{(1)}$ les genres arithmétiques et linéaires de F et Φ. En appliquant les formules de M. Severi [2]), on voit que l'on a

$$p_a + 1 = p(\pi_a + 1),$$

$$p^{(1)} - 1 = p(\pi^{(1)} - 1).$$

Nous supposerons que la surface F n'est ni rationelle, ni référable, par une transformation birationelle, à une surface réglée. Il en sera de même de Φ, car, d'après un théorème de M. Enriques [3]), les courbes 12-canoniques de Φ (éventuellement virtuelles) ont pour transformées des courbes 12-canoniques de F. Or celles-ci sont

[1]) Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem. 1914, (5), XXIII, pp. 408—413.

[2]) Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica. Rend. del R. Istituto Lombardo, 1903, (2), XXXVI, pp. 495—511.

[3]) Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche. Memorei della R. Accademia di Torino, 1893, (2), XLIV.

effectives [1]), donc Φ possède des courbes 12-canoniques effectives et ne peut donc être ni rationelle, ni référable à une réglée.

Considérons, sur la surface F, un système linéaire complet $|C|$ tel que T transforme une courbe de $|C|$ en une courbe de $|C|$ en général différente de la première. Ce système $|C|$ n'est donc pas composé avec I_p.

Il est toujours possible de construire de pareils systèmes sur F. Soit en effet sur Φ un système $|\Gamma|$, régulier, de genre π et de degré n, tel que $n > \pi - 1$. Aux courbes Γ correspondent sur F des courbes $\overline{C}$ de degré pn et de genre $p(\pi - 1) + 1$ appartenant à un certain système linéaire $|\overline{C}|$. Ce système ne peut être composé avec I_p, car alors sa dimension serait égale à celle de $|\Gamma|$:

$$\pi_a + n - \pi + 1.$$

D'après le théorème de Riemann-Roch, on aurait ainsi

$$\pi_a + n - \pi + 1 \geqslant p_a + pn - p(\pi - 1),$$

c'est-à-dire

$$\pi_a + 1 + n - (\pi - 1) \leqslant 0.$$

Cela est impossible, puisque $n > \pi - 1$ et $\pi_a \geqslant - 1$.

2. La transformation T échangeant entre elles les courbes de $|C|$ agit, sur ce système, comme une homographie cyclique sur un espace linéaire à r dimensions, r étant la dimension de $|C|$. Il existe donc, dans $|C|$, un certain nombre k, au plus égal à p, de systèmes partiels $|C_1|$, $|C_2|, \ldots$, $|C_k|$, composés avec I_p, c'est-à-dire tels que T transforme en elle-même chacune de leurs courbes.

Si r_1, $r_2, \ldots$, r_k sont les dimensions respectives de ces systèmes, on a, comme on sait,

$$r_1 + r_2 + \ldots\ldots + r_k + k = r + 1.$$

A chacun des systèmes $|C_1|$, $|C_2|, \ldots$, $|C_k|$ correspond, sur Φ un système linéaire complet. Désignons par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|, \ldots$, $|\Gamma_k|$

[1]) F. Enriques, Sulla classificazione delle superficie algebriche e particolarmente sulle superficie di genere lineare $p^{(1)} = 1$. Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1º sem. 1914, (5), XXIII, pp. 206—214; 291—297.

ces systèmes. Si n et π sont respectivement le degré et le genre virtuels de $|\Gamma_1|$, le système $|C_1|$ et par conséquent le système $|C|$ ont le degré virtuel pn et le genre virtuel $p(\pi - 1) + 1$. Par conséquent, les k systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_k|$ ont mêmes genre et degré virtuels.

Considérons une courbe C qui ne soit pas transformée en elle-même par T. Il lui correspond sur Φ, une courbe Γ de genre effectif $p(\pi - 1) + 1$ et ayant autant de points doubles qu'il y a de couples de points conjugués par rapport à T et situés sur la courbe C considérée. Il est facile de voir que ce nombre est égal à $\frac{1}{2}p(p-1)n$. Par conséquent, la courbe Γ a le genre virtuel

$$p(\pi - 1) + \tfrac{1}{2}p(p-1)n + 1.$$

Faisons varier la courbe C d'une manière continue dans $|C|$ jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec une courbe C_1. La courbe Γ variera dans le système $|\Gamma|$ et finira par coïncider avec une courbe Γ_1 comptée p fois. Le même raisonnement peut se répéter pour les systèmes $|C_2|, \ldots, |C_k|$, de sorte que l'on voit que les courbes $p\Gamma_1$, $p\Gamma_2, \ldots, p\Gamma_k$ sont équivalentes:

$$p\Gamma_1 \equiv p\Gamma_2 \equiv \ldots\ldots \equiv p\Gamma_k.$$

Si la surface Φ est irrégulière, il se peut que les k systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|, \ldots\ldots, |\Gamma_k|$ appartiennent à un même système continu complet. Si au contraire la surface Φ est régulière, ces k systèmes linéaires ne peuvent plus appartenir à un même système continu et, par conséquent, l'opération de division, sur la surface Φ, n'est pas univoque [1]). Le diviseur σ de Φ est au moins égal à k.

Si une surface algébrique régulière représente une involution dépourvue de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique, son diviseur σ est supérieur à l'unité.

3. Dans son dernier Mémoire sur la base des courbes tracées sur une surface algébrique [2]), M. Severi a introduit la notion de groupe abélien G^1_σ fondamental de la division. Il a démontré que

[1]) Severi, loc. cit. (travaux sur la base).

[2]) Complementi loc. cit.

les systèmes distincts provenant de la division d'un système continu par un entier λ, s'obtiennent tous en partant de l'un d'eux et en lui appliquant les opérations de G_σ^1 dont les périodes divisent λ.

Appliquons ce théorème à la surface régulière Φ considérée dans ce travail. Les systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_k|$ doivent s'obtenir en appliquant à l'un d'eux les opérations du groupe G_σ^1 de périodes divisant p. Or p est premier et, d'autre part, k est au moins égal à deux, donc il existe, dans le groupe G_σ^1 relatif à la surface Φ, une opération de période p. En d'autres termes, σ est multiple de p et k est égal à p.

Si une surface algébrique régulière représente une involution d'ordre premier p, dépourvue de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique, son diviseur est multiple de p.

De plus,

Si une surface algébrique contient une involution régulière d'ordre premier p, dépourvue de points de coïncidence, tout système linéaire complet de courbes tracées sur cette surface, invariant pour l'involution mais non composé avec elle, contient p systèmes partiels composés avec l'involution.

On passe aisément du cas particulier où l'involution est d'ordre premier au cas général où son ordre est quelconque.

4. Nous allons construire des surfaces telles que Φ.

Soit Ψ une surface régulière, de S_3, d'équation

$$\psi(x, y, z) = 0$$

et soit

$$f(x, y, z) = 0$$

une deuxième surface découpant sur la première une courbe D. Supposons que la surface Ψ et la courbe D soient invariantes pour une transformation birationelle Θ, de période p, représentée par les formules

$$x' = \chi_1(x, y, z), \quad y' = \chi_2(x, y, z), \quad z' = \chi_3(x, y, z),$$

et telle qu'elle n'ait au plus qu'un nombre fini de points unis sur Ψ.

Considérons la surface F représentée par les équations

$$\psi(x, y, z) = 0, \quad u^p = f(x, y, z).$$

Elle est régulière, puisque la courbe D est irréductible [1]). Elle admet la transformation birationelle de période p

$$x' = \chi_1(x, y, z), \quad y' = \chi_2(x, y, z), \quad z' = \chi_3(x, y, z), \quad u' = \varepsilon u,$$

où ε est une racine primitive $p^{\text{ième}}$ de l'unité, en elle-même. Cette transformation engendre une involution I_p, d'ordre p, dont les points unis vérifient les équations

$$x = \chi_1(x, y, z), \quad y = \chi_2(x, y, z), \quad z = \chi_3(x, y, z), \quad u = 0.$$

Par hypothèse, il n'y a aucun point vérifiant ces quatre équations, donc I_p est dépourvue de points de coïncidence.

Une surface Φ, représentative de I_p, est certainement régulière et, comme nous l'avons vu, son diviseur est multiple de p. Pour construire la surface Φ, on construit tout d'abord une surface Ψ^*, d'équation

$$\psi^*(x, y, z) = 0$$

représentative de l'involution engendrée sur Ψ par θ. Soient

$$\psi^* = 0, \quad f^*(x, y, z) = 0$$

les équations de la courbe D^* homologue de la courbe D sur Ψ^*; la surface Φ a pour équations

$$\Psi^*(x, y, z) = 0, \quad u^p = f^*(x, y, z).$$

5. Considérons, à titre d'exemple, le plan double

$$z^2 = f(x, y),$$

où $f(x, y) = 0$ est une courbe invariante pour la transformation

$$(\theta) \qquad x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{y}$$

mais ne passant pas par les points invariants de cette transformation:

$$x^2 - 1 = 0, \quad y^2 - 1 = 0.$$

[1]) R. Torelli, *Osservazioni di Geometria sopra una varietà algebrica*. Rend. R. Accad. di Napoli, 1911.

Soient $2n$ l'ordre de $f(x, y) = 0$, $2n_1$ le nombre de fois qu'elle passe par le point $(0, 0)$, $2n_2$ le nombre de fois qu'elle passe par $(0, \infty)$, $2n_3$ le nombre de fois qu'elle passe par $(\infty, 0)$. On a d'ailleurs

$$n = n_1 + n_2 + n_3.$$

Rapportons projectivement les courbes

$$\lambda_1 y (x^2 - 1) + \lambda_2 x (y^2 - 1) + \lambda_3 (x^2 - y^2) = 0$$

aux droites

$$\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 = 0$$

d'un plan. Soient

$$\alpha_i (X, Y) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

les équations des quatre droites correspondant aux quatre points invariants pour θ. A la courbe $f(x, y) = 0$ correspond une courbe $F(X, Y) = 0$, d'ordre $2n$, passant n_1 fois par deux sommets opposés du quadrilatère complet formé par les droites $\alpha_i (X, Y) = 0$, n_2 fois par deux autres sommets opposés et n_2 fois par les deux derniers sommets.

D'après ce que nous avons vu plus haut, la surface

$$Z^2 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 F(X, Y)$$

a le diviseur σ pair [1]).

Le plan double dont la courbe de diramation se compose des quatre côtés d'un quadrilatère complet et d'une courbe d'ordre $2n$ passant le même nombre de fois par deux sommets opposés du quadrilatère, mais de telle manière qu'un côté ne rencontre pas la courbe en dehors des trois sommets qu'il contient a un diviseur pair.

---

[1]) Pour $n = 4$, $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 2$, la surface a les genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$. On a alors $\sigma = 2$, comme on le sait depuis longtemps.