Sur les surfaces et variétés algébriques intersections d'hyperquadriques

Lucien Godeaux

Résumé
Étude d'involutions du second ordre appartenant à des surfaces ou à des variétés algébriques à trois dimensions, intersections complètes d'hyperquadriques.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces et variétés algébriques intersections d'hyperquadriques

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude d'involutions du second ordre appartenant à des surfaces ou à des variétés algébriques à trois dimensions, intersections complètes d'hyperquadriques.

Une variété algébrique d'un espace linéaire à $2r - 3$ dimensions, intersection complète de r hyperquadriques, a comme variétés canoniques ses sections par les hyperquadriques de l'espace. Nous nous proposons d'étudier les involutions du second ordre appartenant à une telle variété dans les cas $r = 5$ et $r = 6$, et de construire les images de ces involutions.

Dans le cas $r = 5$, où la variété est une surface, l'étude se développe comme applications des théories que nous avons exposées dans un ouvrage récent (¹). Dans le cas $r = 6$, où la variété est à trois dimensions, il n'en est plus de même et la recherche doit être conduite d'une manière différente. Le cas $r = 6$ n'est pas une simple extension du cas précédent. C'est ainsi que si une surface contient une involution du second ordre privée de points unis, son système canonique contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution et celui qui a la dimension minimum est le transformé du système canonique de la surface image. Au contraire, dans le cas considéré ici, sur une

(¹) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

variété algébrique à trois dimensions, le transformé du système canonique de la variété image est celui qui a la dimension maximum parmi les systèmes canoniques partiels qui appartiennent à l'involution.

De plus, si une surface contient une involution du second ordre ayant des points unis, le transformé du système canonique de la surface image n'a pas pour points-base les points unis. C'est le contraire qui se présente sur les variétés à trois dimensions.

Nous aurons à plusieurs reprises à utiliser les résultats de deux notes récentes [1] ainsi que d'une note plus ancienne [2].

I. Surfaces

1. Soit dans un espace linéaire S_7 à sept dimensions une surface F intersection complète de cinq hyperquadriques. La surface F est d'ordre 32 et ses sections hyperplanes C sont de genre 49. Le système canonique de F est découpé par les hyperquadriques. Les hyperquadriques linéairement indépendantes de S_7 sont au nombre de 36, donc le genre géométrique de F est $p_g = 31$. D'autre part, F étant régulière, son genre arithmétique est $p_a = 31$.

Le système canonique de F étant $|2C|$, on a $|C'| = |3C|$ et le système adjoint $|C'|$ a la dimension $31 + 49 - 1 = 79$. Le nombre des hypersurfaces cubiques de S_7 étant 120, il y en a 40 qui contiennent F.

Le genre linéaire de F est $p^{(1)} = 2^7 + 1 = 129$ et le système bicanonique a la dimension $31 + 129 - 1 = 159$. On a donc $P_2 = 160$. le nombre des hypersurfaces du quatrième ordre linéairement indépendantes étant 330, il y en a 170 qui contiennent F.

2. Supposons que F soit transformée en soi par une homographie biaxiale harmonique H, ayant deux axes ponctuels σ_1, σ_2 à trois dimensions.

---

(1) *Sur les involutions du second ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1968, pp. 137-140).

Sur les variétés à trois dimensions contenant une involution cyclique ayant une courbe de points unis (Idem., 1968, pp. 209-218).

(2) *Sur les courbes et surfaces intersections d'hyperquadriques* (Idem., 1944, pp. 262-269).

Si nous désignons par y_0,y_1,y_2,y_3 les coordonnées des points de σ_1 et par z_0,z_1,z_2,z_3 celles des points de σ_2, les hyperquadriques de S_7 transformées en elles-mêmes par H sont de deux sortes: Les hyperquadriques Q_1 d'équation

$$\varphi_2(y_0,y_1,y_2,y_3) + \psi_2(z_0,z_1,z_2,z_3) = 0,$$

où φ_2 et ψ_2 sont des formes du second degré et les hyperquadriques Q_2 d'équation

$$\Sigma\lambda_{ik}z_i z_k = 0. \qquad (i,k = 0,1,2,3)$$

Les quadriques Q_1 linéairement indépendantes sont au nombre de 20 et les quadriques Q_2 au nombre de 16.

Sur F, l'homographie H détermine une involution I d'ordre deux et pour que I soit privée de points unis, F doit être l'intersection de cinq hyperquadriques Q_1 ou de quatre hyperquadriques Q_1 et d'une hyperquadrique Q_2.

Supposons que F soit l'intersection de cinq hyperquadriques Q_1. Dans le système linéaire $| G | = | 2C |$, il y a deux systèmes appartenant à l'involution I. L'un, $| G_1 |$, est découpé par les hyperquadriques Q_1 et a la dimension 14. L'autre, $| G_2 |$, découpé par les hyperquadriques Q_2, a la dimension 15. Soient Φ une image de l'involution I et $| \Gamma_1 |$, $| \Gamma_2 |$ les systèmes qui correspondent respectivement aux systèmes $| G_1 |$, $| G_2 |$.

Comme nous l'avons démontré, le système canonique de Φ est celui des sytèmes $| \Gamma_1 |$, $| \Gamma_2 |$ qui a la dimension minimum, c'est-à-dire $| \Gamma_1 |$. Les genres de Φ sont donc $p'_a = p'_g = 15$. D'autre part, le genre linéaire de Φ est égal à 65.

Le système $| \Gamma'_1 |$ adjoint à $| \Gamma_1 |$ a la dimension $15 + 65 - 1 = 79$ et découpe sur une courbe Γ_2 une série paracanonique. Le système $| \Gamma'_1 - \Gamma_2 |$ a la dimension $p'_a = 15$. Le système $| \Gamma'_2 |$ découpe sur une courbe Γ_1 une série paracanonique et le système $| \Gamma'_1 - \Gamma_2 |$ a la dimension $p'_a = 15$. Les systèmes $| \Gamma'_1 - \Gamma_2 |$ et $| \Gamma'_2 - \Gamma_1 |$ coïncident et correspondent au système $| G_2 |$.

Supposons maintenant que F soit l'intersection de quatre Q_1 et d'une Q_2.

Le système $| G_1 |$ découpé par les Q_1 a la dimension 15 et le système $| G_2 |$ la dimension 14. Les systèmes $| \Gamma_1 |$,$| \Gamma_2 |$ ont les dimensions 15 et 14; par conséquent le système canonique de Φ est cette fois $| \Gamma_2 |$

et on a encore $p_a = p_g = 15$. Les systèmes $|\Gamma_1 - \Gamma_2|$,$|\Gamma_2 - \Gamma_1|$ correspondent au système $|G_1|$.

Dans les deux cas, on a bien

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1).$$

3. Lorsque la surface F est l'intersection de trois Q_1 et de deux Q_2, l'involution I possède huit points unis dans σ_1 et huit points unis dans σ_2.

Le système canonique de Φ correspond au système $|G_1|$ découpé par les hyperquadriques Q_1 et cette surface a les genres $p'_a = p'_g = 17$, $p'^{(1)} = 65$. On a bien

$$12(p_a + 1) = 24(p'_a + 1) - 3.16.$$

Le système $|\Gamma_2|$ a la dimension 13 et le genre 29.

4. Si la surface F est l'intersection de deux Q_1 et de trois Q_2, l'involution I possède deux courbes unies D_1, D_2 du quatrième ordre situées l'une dans σ_1, l'autre dans σ_2.

Aux courbes canoniques de Φ correspondent des courbes canoniques de F comprenant les courbes D_1, D_2. On en conclut qu'aux courbes canoniques de Φ correspondent sur F les courbes découpées par les hyperquadriques Q_2. On a donc pour $\Phi, p'_a = p'_g = 13$.

On peut d'ailleurs obtenir d'une manière simple les équations de la surface.

Soient

$$z_0 f_0(y) + z_1 f_1(y) + z_2 f_2(y) + z_3 f_3(y) = 0,$$

$$z_0 f'_0(y) + z_1 f'_1(y) + z_2 f'_2(y) + z_3 f'_3(y) = 0,$$

$$z_0 f''_0(y) + z_1 f''_1(y) + z_2 f''_2(y) + z_3 f''_3(y) = 0$$

les équations des hyperquadriques Q_2 contenant F, les fonctions f étant linéaires en y. Désignons par Δ_0, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ les déterminants tirés de la matrice

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} f_0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f'_0 & f'_1 & f'_2 & f'_3 \\ f''_0 & f''_1 & f''_2 & f''_3 \end{matrix} \right\|.$$

On a

$$\frac{z_0}{\Delta_0} = \frac{z_1}{\Delta_1} = \frac{z_2}{\Delta_2} = \frac{z_3}{\Delta_3} = \rho$$

et si

$$\varphi_1(y) + \psi_1(z) = 0, \quad \varphi_2(y) + \psi_2(z) = 0$$

sont les équations des hyperquadriques Q_1 passant par F, il vient

$$\varphi_1(y) + \rho^2\psi_1(\Delta) = 0, \quad \varphi_2(y) + \rho^2\psi_2(\Delta) = 0$$

et enfin, pour l'équation de Φ,

$$\varphi_1(y)\psi_2(\Delta) - \varphi_2(y)\psi_1(\Delta) = 0.$$

La surface Φ est du huitième ordre et passe deux fois par la courbe d'ordre six et de genre trois annulant les quatre déterminants Δ. Les adjointes sont les surfaces du quatrième ordre passant par cette courbe.

On peut observer que la variété commune aux trois Q_2 n'est autre que la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un espace à trois dimensions.

5. Considérons maintenant le cas où l'homographie H possède comme axes un espace à quatre dimensions σ_1 et un plan σ_2. Conservons les mêmes notations légèrement modifiées. Les Q_1 linéairement indépendantes sont au nombre de 21 et les Q_2 au nombre de 15.

Supposons en premier lieu que la surface F soit l'intersection de cinq hyperquadriques Q_1. L'involution I engendrée par H sur F est privée de points unis. Dans le système canonique de F, il y a deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I, l'un découpé par les Q_1 a la dimension 15, l'autre, découpé par les Q_2, a la dimension 14. On en conclut que c'est le second qui est le transformé du système canonique de la surface Φ. Celle-ci a les genres $p_a' = p_g' = 15$.

Si la surface F est l'intersection de quatre Q_1 et d'une Q_2, l'involution I possède 16 points unis situés dans σ_1. Le système canonique de Φ a comme transformé sur F le système découpé par les Q_1. La surface Φ a les genres $p_a' = p_g' = 17$.

On a d'ailleurs

$$12(p_a + 1) = 24(p_a' + 1) - 3.16.$$

6. Si la surface F est l'intersection de trois Q_1 et de deux Q_2, l'involution I possède dans l'espace σ_1 une courbe unie d'ordre huit et de

genre cinq. Le système canonique de Φ a comme transformé sur F le système de courbes contenant comme partie la courbe D, c'est-à-dire des courbes découpées par les hyperquadriques Q_2. Les genres de Φ sont donc $p'_a = p'_g = 13$.

On peut également dans ce cas obtenir facilement les équations de la surface. Supposons que les coordonnées des points de σ_1 soient y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 et celles des points du plan σ_2, z_0, z_1, z_2. Soient

$$z_0 f_0(y) + z_1 f_1(y) + z_2 f_2(y) = 0, \quad z_0 f'_0(y) + z_1 f'_1(y) + z_2 f'_2(y) = 0$$

les équations des hyperquadriques Q_2 passant par F. Si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont les déterminants tirés de la matrice

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ f'_0 & f'_1 & f'_2 \end{matrix} \right\|$$

on a

$$\frac{z_0}{\Delta_0} = \frac{z_1}{\Delta_1} = \frac{z_2}{\Delta_2} = \rho,$$

Si

$$\varphi_0(y) + \psi_0(z) = 0, \quad \varphi_1(y) + \psi_1(z) = 0, \quad \varphi_2(y) + \psi_2(z) = 0$$

sont les équations des trois Q_1 passant par F, on a

$$\varphi_0(y) + \rho^2\psi_0(\Delta) = 0, \quad \varphi_1(y) + \rho^2\psi_1(\Delta) = 0, \quad \varphi_2(y) + \rho^2\psi_2(\Delta) = 0$$

et les équations de la surface Φ sont

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_0(y) & \varphi_1(y) & \varphi_2(y) \\ \psi_0(\Delta) & \psi_1(\Delta) & \psi_2(\Delta) \end{matrix} \right\| = 0,$$

C'est une surface contenant quatre fois la surface cubique annulant tous les déterminants Δ et qui est par conséquent d'ordre 16.

Les courbes canoniques sont données par

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_0(y) & \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \lambda(y) \\ \psi_0(\Delta) & \psi_1(\Delta) & \psi_2(\Delta) & \mu(\Delta) \end{matrix} \right\| = 0,$$

où $\lambda(y)$ est quadratique et μ quadratique en Δ.

II. Variétés à trois dimensions

7. Soit dans un espace S_9 à 9 dimensions une variété V à trois dimensions intersection complète de six hyperquadriques. Cette variété est d'ordre $2^7 = 128$.

Les sections hyperplanes de V sont des surfaces F régulières de genres $p_a = p_g = 111$ et ses sections par des espaces à sept dimensions sont des courbes C de genre 129.

Les surfaces canoniques de V sont découpées par les hyperquadriques et comme le nombre de celles-ci linéairement indépendantes est 55, le genre géométrique de V est $P_g = 49$.

Le degré du système $|G| = |2F|$ est $\Omega_0 = 2^9$, le genre d'une courbe intersection de deux surfaces canoniques est $\Omega_1 = 3{,}2^4 + 1 = 3.2_4 + 1$. Enfin, le genre arithmétique d'une surface G est $\Omega_2 = 11.2^5 - 1$. D'après la formule de Severi [1], le genre arithmétique de V est $2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4$, d'où $P_a = 49$. La variété V est complètement régulière.

Sur V, on a

$$F' - F = G, \ F' = 3F.$$

Le nombre des hypersurfaces du quatrième ordre linéairement indépendantes est égal à 715 et il y en a 315 qui passent par F. Le bigenre de V est donc $P_2 = 400$.

8. Supposons que la variété V soit transformée en elle-même par une homographie biaxiale harmonique H ayant comme axes deux espaces linéaires à quatre dimensions σ_1, σ_2.

Les hyperquadriques Q_1 transformées en elles-mêmes par H et qui ne passent pas par les axes, linéairement indépendantes sont au nombre de 30 et celles, Q_2, qui passent par les axes sont au nombre de 25.

Supposons que la variété V soit l'intersection de six Q_1. Son système canonique contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I: l'un, $|G_1|$, est découpé par les Q_1 et a la dimension 23, l'autre, $|G_2|$, est découpé par les Q_2 et a la dimension 24. L'involution I est dépourvue de points unis.

Désignons par Ω une variété image de l'involution I et par $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, les systèmes qui correspondent sur Ω aux systèmes $|G_1|$, $|G_2|$. L'un des systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, est le système canonique de Ω; ils ont les dimensions 23 et 24.

(3) SEVERI, *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2° sem. 1909, pp. 33-87).

Les systèmes $|\Phi_1|, |\Phi_2|$ ont les mêmes degrés, les mêmes genres des courbes intersections, et les mêmes genres arithmétiques des surfaces. Ce sont précisément les nombres

$$\Omega'_0 = 2^8, \Omega'_1 = 3.2^7 + 1, \Omega'_2 = 11.2^4 - 1$$

et le genre arithmétique P'_a de Ω est donné par

$$2P'_a = 2^8 - 3.2^7 - 1 + 11.2^4 - 1 + 4,$$

d'où $P'_a = 25$. On a donc bien

$$P_a = 2P'_a - 1$$

comme nous l'avions établi récemment.

Parmi les hypersurfaces du quatrième ordre linéairement indépendantes, transformées en elles-mêmes par H, il en est 365 ne contenant pas les axes σ_1, σ_2 et 350 contenant ces axes. Parmi les premières, il en est 165 contenant V et parmi les secondes, 150. On voit donc que le système bicanonique de V contient deux systèmes partiels appartenant à l'involution I, ils ont tous deux la dimension 199. L'un de ces systèmes est le transformé du système adjoint à $|\Gamma_1|$. Désignons-le par $|(2G)_1|$ et soit $|(2G)_2|$ l'autre.

Au système $|(2G)_1|$ correspond donc sur Ω l'adjoint $|\Phi'_1|$ à $|\Phi_1|$. Il découpe sur une surface Φ_1 le système canonique de celle-ci, de dimension $\Omega'_2 - 1 = 174$. Il en résulte que le système canonique de Ω a la dimension $199 - 175 = 24$. Le genre géométrique de Ω est donc $P'_g = 25$. On voit donc que la variété Ω est complètement régulière. On voit de plus que le système canonique de Ω correspond au système $|G_2|$.

Au système $|(2G)_2|$ correspond sur Ω l'adjoint $|\Phi'_2|$ à $|\Phi_2|$. Les surfaces Φ'_2 découpent sur une surface Φ_1, un système linéaire de dimension $\Omega_2 = 175$ et par conséquent le système $|\Phi'_2 - \Phi_1|$ a la dimension $199 - 176 = 23$.

On voit donc que *le système canonique de la variété* V *contient deux systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution* I *et que le système canonique de l'image* Ω *de cette involution correspond à celui des systèmes précédets qui a la dimension maximum.*

Lorsque la variété V est l'intersection de cinq Q_1 et d'une Q_2, le calcul se conduit de la même manière. L'adjoint $|G'|$ à $|G|$ contient deux systèmes de dimension 199 appartenant à l'involution I.

On a encore $P'_a = 25$ mais les systèmes $| \Phi_1 |, | \Phi_2 |$ ont respectivement les dimensions 24 et 23. Actuellement, le système canonique de Ω est $| \Phi'_1 |$ et on a $P'_g = 25$.

9. Lorsque la variété V est l'intersection de quatre Q_1 et de deux Q_2, l'involution I possède 32 points unis, 16 dans chacun des espaces σ_1, σ_2.

Les systèmes $| 2G_1 |, | 2G_2 |$ ont respectivement pour dimensions 201 et 197. Les surfaces G_1 ne passent pas en général par les points unis, mais les surfaces G_2 passent par ces 32 points.

Sur une surface G_1, il y a deux systèmes de courbes canoniques appartenant à l'involution I: l'un a la dimension 201, l'autre la dimension 197. Le système canonique de la surface Φ_1 homologue correspond à celui de ces systèmes dont la dimension est minimum et par conséquent l'adjoint au système $| \Phi_1 |$ est le correspondant du système $| (2G)'_2 |$. Une surface Φ_1 ayant le genre arithmétique Ω'_2, le système canonique de Ω a la dimension $197 - 175 = 22$. On a donc $P'_g = 23$.

Le système $| (2\Phi)'_2 |$ homologue de $| (2G)_2 |$ passe par les points de diramation de Ω et il en est de même des surfaces canoniques de cette variété.

10. Lorsque la variété V est l'intersection de trois Q_1 et de trois Q_2, l'involution I possède deux courbes unies d'ordre huit et de genre cinq situées l'une D_1 dans σ_1, l'autre D_2 dans σ_2.

Le système $| (2G) |$ contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I: l'un, $| (2G)_1 |$ de dimension 205, l'autre $| (2G)_2 |$ de dimension 193. Les surfaces de ce dernier système contiennent les courbes D_1 et D_2.

Sur une surface G_1, l'homographie H détermine une involution possédant 32 points unis sur D_1 et D_2 et le système canonique de la surface Φ_1 homologue est découpé par les surfaces correspondant aux surfaces $(2G)_1$. L'adjoint $| \Phi'_1 |$ à $| \Phi_1 |$ est donc $| (2\Phi_1)_1 |$.

Le genre arithmétique de Φ calculé par la méthode habituelle est $p_a = 179$. Le genre géométrique de Ω est donc $P'_g = 27$.

Ces conclusions sont conformes à nos résultats exposés dans une note citée au début.

11. Si la variété V est l'intersection de deux Q_1 et de quatre Q_2, l'involution I possède deux surfaces unies du quatrième ordre D_1 dans σ_1 et D_2 dans σ_2.

Les systèmes $|G_1|$ et $|G_2|$ ont respectivement les dimensions 27 et 20.

Le système $|(2G)|$ contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I, l'un $|(2G)_1|$ de dimension 211 et l'autre, $|(2G)_2|$ de dimension 187, les surfaces de ce dernier contenant les surfaces D_1, D_2.

Les surfaces canoniques de Ω correspondent aux parties variables des surfaces G_2 et on a donc $P'_g = 21$.

On peut obtenir une représentation analytique de la variété Ω de la manière suivante.

Appelons y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 les coordonnées des points de σ_1 et z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 celles des points de σ_2. Les équations des quatre hyperquadriques Q_2 passant par V sont linéaires en y et en z. On en tire que les valeurs des z sont proportionnelles à cinq déterminants $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ du quatrième degré en y. Si les équations des deux hyperquadriques Q_1 passant par F sont

$$\varphi_1(y) + \psi_1(z) = 0, \quad \varphi_2(y) + \psi_2(z) = 0,$$

les équations de Ω sont

$$\varphi_1(y)\psi_2(\Delta) - \varphi_2(y)\psi_1(\Delta) = 0.$$

Ω est dans σ_1 une variété du dixième ordre passant doublement par la surface Δ du dixième ordre commune aux équations $\Delta_0 = \Delta_1 = \ldots = \Delta_4 = 0$.

Les adjointes sont les hypersurfaces du cinquième ordre passant par la surface Δ.

La variété commune aux quatre hyperquadriques Q_2 n'est autre que la variété de Segre représentant les couples de points d'une droite et d'un espace à quatre dimensions.

12. Nous allons maintenant supposer que l'homographie harmonique H possède comme axes un espace à cinq dimensions σ_1 et un espace à trois dimensions σ_2.

Les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H forment un système $|Q_1|$ de dimension 30, n'ayant pas de points-base et un système $|Q_2|$ de dimensions 23, dont les hyperquadriques contiennent les espaces σ_1, σ_2.

Les hypersurfaces du quatrième ordre transformées en elles-mêmes par H et ne contenant pas V, forment deux systèmes linéaires $|(2G)_1|$, $|(2G)_2|$ appartenant à l'involution.

Supposons en premier lieu que V soit l'intersection de six Q_1. Les systèmes $|(2G)_1|$,$|(2G)_2|$ ont la même dimension 199, découpant sur V des surfaces bicanoniques.

Désignons par $|G_1|$ le système linéaire de dimension 24 découpé sur V par les Q_1 et par $|G_2|$ le système de dimension 23 découpé par les Q_2. Soient $|\Phi_1|$,$|\Phi_2|$ les systèmes qui leur correspondent sur Ω. L'adjoint $|\Phi'_1|$ à $|\Phi_1|$ correspond à l'un des systèmes $|(2G)_1|$, $|(2G)_2|$, par exemple au premier. Au second correspond l'adjoint $|\Phi'_2|$ à $|\Phi_2|$.

Le système canonique de Ω, $|\Phi'_1 - \Phi_1|$, a la dimension $199 - 175 = 24$, car Φ_1 a le genre arithmétique $\Omega'_2 = 175$. Le genre géométrique de Ω est $P'_g = 25$ et comme le système canonique de Ω correspond à l'un des systèmes $|G_1|$,$|G_2|$, c'est précisément à $|G_1|$ qu'il correspond.

Le système $|\Gamma'_2 - \Gamma_1|$ a la dimension 23.

Le calcul qui a été fait plus haut est encore valable et on a $P'_a = 25$. La variété Ω est complètement régulière.

13. Supposons maintenant que V soit l'intersection de cinq Q_1 et d'une Q_2. L'involution I possède $2^5 = 32$ points unis situés dans σ_1.

Les systèmes $|G_1|$,$|G_2|$ ont actuellement les dimensions 25 et 22, les systèmes $|(2G)_1|$ et $|(2G)_2|$ les dimensions 201 et 187.

Sur une surface G_1 l'homographie H détermine une involution privée de points unis et par conséquent les surfaces Φ_1 ont le genre arithmétique $\Omega'_2 = 175$.

Les surfaces $(2G)_1$,$(2G)_2$ déterminent sur une surface G_1 deux systèmes linéaires partiels compris dans le système canonique, appartenant à l'involution et le système canonique de la surface Φ_1 homologue correspond au système de dimension minimum, c'est-à-dire au système découpé par $|(2G)_2|$. Le système canonique de Ω a donc la dimension $187 - 175 = 12$. On a par suite $P'_g = 13$.

Les courbes $(2G)_2$ passant par les points unis de l'involution, les surfaces canoniques de Ω passent par les points de diramation.

14. Si la variété V est l'intersection de quatre Q_1 et de deux Q_2, l'involution I possède, dans σ_1, une courbe de points unis D, du

seizième ordre. Les systèmes linéaires $|G_1|$,$|G_2|$ ont respectivement les dimensions 26 et 21.

Sur une surface G_1, H détermine une involution ayant 32 points unis et le système transformé du système canonique de la surface Φ_1 homologue est découpé par le système $|(2G)_1|$. Celui-ci a la dimension 205.

Le genre arithmétique d'une surface Φ est égal à 179 donc le système canonique de la variété Ω, $|\Phi'_1 - \Phi_1|$, a la dimension 205 — 175 = 26. Le genre géométrique de la variété Ω est donc $P'_g = 27$.

15. Supposons enfin que la variété V soit l'intersection de trois Q_1 et de trois Q_2. L'involution I possède dans σ_1 une surface D de points unis d'ordre huit.

Les systèmes $|(2G)_1|$,$|(2G)_2|$ ont respectivement les dimensions 211 et 187. Les surfaces $(2G)_2$ contiennent la surface D et découpent par conséquent sur V le système transformé du système canonique de Ω. Ce système est donc $|\Phi_2 - \Delta|$, Δ étant la surface homologue de D. Le genre géométrique de Ω est $P'_g = 21$.

On peut, comme précédemment, obtenir les équations de la variété Ω.

Soient y_0,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 les coordonnées des points de σ_1 et z_0,z_1,z_2, z_3 celles des points de σ_2. Des équations des trois Q_2 passant par V, on déduit que les z sont proportionnels à trois déterminants $\Delta_0\Delta_1,\Delta_2$ du second degré en y.

Si les équations des trois Q_1 contenant V sont

$$\varphi_1(y) + \psi_1(z) = 0, \quad \varphi_2(y) - \psi_2(z) = 0, \quad \varphi_3(y) - \psi_3(z) = 0,$$

les équations de Ω sont

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) \\ \psi_1(\Delta) & \psi_2(\Delta) & \psi_3(\Delta) \end{matrix} \right\| = 0.$$

C'est une variété d'ordre 24 contenant deux fois la variété d'ordre trois annulant les trois déterminants Δ. La variété Ω est donc d'ordre 18.

Les surfaces canoniques ont pour équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \varphi_3(y) & \lambda(y) \\ \psi_1(\Delta) & \psi_2(\Delta) & \psi_3(\Delta) & \mu(\Delta) \end{matrix} \right\| = 0,$$

où λ et μ sont des formes du second degré.

Liège, le 17 mai 1968.