Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions du second ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions (seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Relations entre le système canonique de la variété support de l'involution et le système canonique de la variété image de celle-ci.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions du second ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions

(seconde note)

LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Relations entre le système canonique de la variété support de l'involution et le système canonique de la variété image de celle-ci.

Nous avons récemment consacré plusieurs notes à l'étude des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique (1). On rencontre dans ces recherches une différence suivant la parité du nombre de dimensions de la variété. Si une variété algébrique V à n dimensions contient une involution cyclique privée de points unis, le système canonique de la variété Ω image de cette involution a pour homologue sur la variété V celui des systèmes compris dans le système canonique appartenant à l'involution qui a la plus petite dimension si n est pair ou celui qui a la plus grande dimension si n est impair (2). Cette propriété s'étend aux cas où l'involution est d'ordre deux et possède un nombre fini de points unis (3). Mais nous n'avons pu établir cette propriété que moyennant une restriction, à savoir que la variété V est privée d'intégrales analogues aux intégrales

(1) La première note est parue dans le Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1968, pp. 137-140.

(2) *Involutions cycliques privées de points unis appartenant à une variété algébrique complètement régulière* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1968, pp. 653-661). Voir également *Variétés algébriques dépourvues de variété canonique mais possédant un système bicanonique* (Idem, 1968, pp. 915-926).

(3) Voir une communication *Variétés algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* présentée au Colloque de Géométrie et de Topologie algébriques de Bucarest (Septembre 1968).

de Picard de première espèce attachée à une surface algébrique. Dans ces conditions, le système canonique d'une hypersurface de la variété V est découpé complètement par les adjointes [1]. Nous avons réussi à nous affranchir de cette restriction dans le cas des variétés algébriques à trois dimensions et d'une involution présentant un nombre fini de points unis. C'est l'objet de cette note.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions contenant une involution I d'ordre deux possédant un nombre fini de points unis. Nous avons montré dans la première note que ce nombre est multiple de 8 et nous le désignerons par 8α. Soit T la transformation birationnelle de V en soi génératrice de l'involution.

Considérons un système linéaire de surfaces $|G_1|$ privé de points-base et soit $|G_2|$ le système que T lui fait correspondre. Le système complet $|F| = |G_1 + G_2|$ est transformé en lui-même par T. Si ce système complet appartient à l'involution I, nous le remplacerons par un de ses multiples qui n'appartient pas à l'involution. Soit r la dimension de ce système.

Cela étant, rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions. A V correspond une variété que nous continuerons à désigner par V et à T une transformation birationnelle qui échange entre eux les hyperplans et est par conséquent une homographie H. Cette homographie est harmonique et biaxiale; nous désignerons par σ_m, σ_n ses axes, de dimensions m, n. Notons que l'on peut toujours supposer m, n et $r = m + n + 1$ aussi grands qu'on le veut, en remplaçant éventuellement $|F|$ par un de ses multiples convenablement choisi.

Le système $|F|$ contient deux systèmes linéaires $|F_1|$, $|F_2|$ appartenant à l'involution, le premier découpé par les hyperplans passant par σ_n, le second par les hyperplans passant par σ_m. L'un de ces systèmes, qui comprend les surfaces $G_1 + G_2$, est dépourvu de points-base; nous supposerons que c'est le système $|F_1|$. Dans ces conditions, la variété V ne rencontre pas l'espace σ_n mais rencontre σ_m aux 8α points unis de l'involution.

[1] Ce théorème a été établi pour les variétés à trois dimensions par Severi et dans le cas général par M.E. Marchionna. Consulter l'appendice VI dû à M. Marchionna dans l'ouvrage de Severi, *Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra une varietà algebrica* (Roma, Cremonese, 1959), pp. 395-437.

En rapportant projectivement les surfaces F_1 aux hyperplans d'un espace S_m à m dimensions, ou si l'on veut en projetant V de σ_n sur σ_m, il correspond à V une variété Ω image de l'involution I.

La construction précédente de V montre que s'il existe sur V un système linéaire de surfaces $|F|$ dépourvu de points-base, transformé en lui-même par H et contenant un système linéaire dépourvu de points-base appartenant à l'involution I, ce système contient un second système linéaire appartenant à l'involution et ayant comme points-base les 8α points unis de I.

2. Nous désignerons par $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$ les systèmes linéaires de surfaces qui correspondent sur Ω aux systèmes linéaires $|F_1|$, $|F_2|$. Le premier est d'ailleurs le système des sections hyperplanes de Ω.

On sait que les 8α points de diramation de Ω sont quadruples pour cette variété, le cône tangent en un de ces points ayant pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese (si m est assez grand).

En chaque point de diramation, les surfaces Φ_2 ont un point double conique.

Désignons par $|F'|$ le système adjoint à $|F|$. Il découpe sur les surfaces F_1, F_2 des courbes canoniques des surfaces, mais non nécessairement le système canonique complet.

Aux courbes canoniques d'une surface Φ_1 correspondent sur la surface F_1 homologue des courbes canoniques de cette surface et de même, aux courbes canoniques d'une surface Φ_2 correspondent des courbes canoniques de la surface F_2 homologue. Si le système $|F'|$ appartenait à l'involution I, il lui correspondrait sur Ω un système $|\Phi'|$ dont les surfaces découperaient sur les surfaces Φ_1, Φ_2 des courbes canoniques de ces surfaces. Les systèmes distincts $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$ auraient donc le même système adjoint, ce qui est absurde.

3. Le système adjoint $|F'|$ à $|F|$ est transformé en lui-même par H et contient deux systèmes $|F'_1|$, $|F'_2|$ appartenant à l'involution.

Sur une surface F_2, H détermine une involution ayant comme points unis les 8α points unis de I. Le système canonique $|C_2|$ de cette surface contient deux systèmes linéaires $|C_{21}|$, $|C_{22}|$ composés au moins partiellement avec l'involution. Le premier de ces systèmes est dépourvu de points-base et le second a comme points-base les 8α points unis de I. On sait qu'aux courbes canoniques de la surface Φ_2 homologue de F_2 correspondent des courbes du système $|C_{21}|$.

On en conclut que le système $| F'_2 |$ est dépourvu de points-base et que par conséquent, le système $| F'_1 |$ a comme points-base les 8α points unis de I.

Désignons par $| \Phi'_1 |$, $| \Phi'_2 |$ les systèmes linéaires qui correspondent sur Ω aux systèmes $| F'_1 |$, $| F'_2 |$. Le système $| \Phi'_2 |$ est l'adjoint au système $| \Phi_2 |$.

Sur une surface F_1 l'homographie H détermine une involution privée de points unis et le système canonique $| C_1 |$ de cette surface contient deux systèmes linéaires $| C_{11} |$, $| C_{12} |$ appartenant à l'involution. Ils sont découpés par les surfaces F'_1 et F'_2. A l'un de ces systèmes correspond sur la surface Φ_1 homologue de F_1 le système canonique de cette surface. Si nous supposons que ce système est $| C_{12} |$, les surfaces Φ'_2 seraient adjointes à la fois à $| \Phi_1 |$ et à $| \Phi_2 |$, ce qui est absurde. On en conclut que le système $| \Phi'_1 |$ est adjoint au système $| \Phi_1 |$.

4. Le système canonique de la variété Ω est donc

$$| \Phi'_1 - \Phi_1 | = | \Phi'_2 - \Phi_2 |.$$

Soient A un point uni de l'involution I et A′ le point de diramation qui lui correspond sur Ω.

L'espace à trois dimensions tangent en A à V coupe l'espace σ_n suivant un plan σ_2 et aux droites de ce plan correspondent les cônes quadratiques appartenant au cône du quatrième ordre tangent à Ω au point A′.

Une surface F'_1 passe par A et le plan tangent à cette surface en ce point coupe le plan σ_2 suivant une droite. Il en résulte que les surfaces Φ'_1 ont en A′ un point double conique.

Cela étant, les surfaces Φ'_1 ayant des points doubles coniques aux 8α points de diramation de Ω et les surfaces Φ_1 ne passant pas par ces points, les surfaces $\Phi'_1 - \Phi_1$ ont nécessairement des points doubles coniques aux points de diramation de Ω.

Les surfaces canoniques $\Phi'_1 - \Phi_1$ ont des points doubles coniques aux points de diramation de la variété Ω.

Les surfaces Φ'_2 ne passent pas par les points de diramation de Ω, mais les surfaces Φ_2 ont des points doubles coniques en ces points, donc il en est de même des surfaces $\Phi'_2 - \Phi_2$.

5. Désignons par ω_0 le degré du système canonique de V, par ω_1 le genre de la section de deux surfaces canoniques, enfin par ω_2 le genre arithmétique d'une surface canonique. Le genre arithmétique de V est donné par

$$2P_a = \omega_0 - \omega_1 + \omega_2 + 4.$$

Soient ω'_0, ω'_1, ω'_2 les nombres analogues relatifs au système canonique de Ω. Le genre P'_a de cette variété est donné par

$$P_a = 2P'_a - 3\alpha - 1,$$

car on a

$$\omega_0 = 2\omega'_0, \omega_1 = 2\omega'_1 + 4\alpha - 1, \omega_2 = 2\omega'_2 - 2\alpha + 1.$$

Nous avions obtenu cette relation dans la première note dans le cas $\alpha = 0$.

6. Soient P_g le genre géométrique de V et P'_g celui de Ω. Désignons par r_{11}, r_{12} les dimensions des systèmes $|C_{11}|$, $|C_{12}|$ sur F_1 et par r_{21}, r_{22} celles des systèmes $|C_{21}|$, $|C_{22}|$ sur F_2.

Le système $|\Phi'_1|$ a la même dimension que $|F'_1|$ et découpe sur une surface Φ_1 le système homologue de $|C_{11}|$. La dimension r'_1 de $|F'_1|$ est donc

$$r'_1 = r_{11} + P'_g.$$

Le système $|\Phi'_2|$ découpe sur une surface Φ_2 le système homologue de $|F'_2|$ sur une surface F_2, c'est-à-dire le système $|C_{22}|$. On a donc également

$$r'_1 = r_{22} + P'_g,$$

d'où $r_{22} = r_{11}$.

La dimension du système adjoint $|F'|$ à $|F|$ peut être calculée de deux manières suivant que l'on considère les surfaces F_1 ou F_2. On trouve

$$r' = r_{11} + r_{12} + P_g + 1 = r_{21} + r_{22} + P_g + 1.$$

On a donc $r_{21} = r_{12}$.

Le système canonique de V contient un système appartenant à l'involution I, le transformé du système canonique $|\Psi|$ de Ω. Il contient donc un second système composé avec l'involution. A ce système correspond sur Ω un système $|\Psi_0|$ qui contient les surfaces $\Phi'_2 - \Phi_1$ et $\Phi'_1 - \Phi_2$.

Les surfaces Φ_2' découpent sur une surface Φ_1 un système linéaire qui correspond au système $| C_{12} |$ et par conséquent le système $| \Phi_2' |$ a la dimension

$$r_2' = r_{12} + P_g',$$

qui est également celle de $| F_2' |$.

D'autre part, les systèmes $| F_1' |$, $| F_2' |$ appartiennent au système $| F' |$ et d'après la théorie des homographies, on a

$$r_1' + r_2' = r' + 1.$$

On en déduit

$$r_{11} + P_g' + r_{12} + P_g' = r_{11} + r_{12} + P_g + 1,$$

c'est-à-dire

$$P_g = 2P_g' - 1.$$

On peut observer que le système $| \Psi_0 | = | \Phi_2' - \Phi_1 |$ est dépourvu de points-base, mais les surfaces $| \Phi_1' - \Phi_2 |$ peuvent avoir des points multiples aux points de diramation.

La dimension x du système $| \Psi_0 |$ est donnée par

$$x + P_g' = P_g = 2P_g' - 1,$$

d'où $x = P_g' - 1$.

Le système canonique de la variété V contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un, de dimension $P_g' - 1$, passe par les points unis de l'involution et a pour homologue sur la variété image de l'involution, le système canonique de celle-ci. L'autre, de dimension $P_g' - 2$, est dépourvu de points-base, Le genre géométrique de la variété V est $P_g = 2P_g' - 1$.

Au point de vue des transformations birationnelles, un point de diramation de la variété Ω est équivalent à une surface rationnelle. Si l'on désigne par Δ la somme des surfaces rationnelles équivalentes aux 8α points de diramation de Ω, on a

$$2\Psi_0 = 2\Psi + \Delta.$$

7. Les développements précédents s'appliquent naturellement aux involutions privées de points unis ($\alpha = 0$). On obtient ainsi les thérorèmes suivants:

Si une variété algébrique à trois dimensions de genre supérieur à l'unité contient une involution du second ordre privée de points unis, son système canonique contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution et celui dont la dimension est la plus élevée correspond au système canonique de la variété image de l'involution.

Si une variété algébrique à trois dimensions possède une surface canonique d'ordre zéro et contient une involution du second ordre privée de points unis, l'image de cette involution possède une surface canonique d'ordre zéro.

On a en effet dans ce cas $|F'_1| = |F_1|$ et par suite $|\Phi'_1| = |\Phi_1|$. Tant sur V que sur Ω, tout système linéaire coïncide avec son adjoint.

Liège, le 30 septembre 1968.