Bulletin de la Classe des sciences

Sur les variétés à trois dimensions contenant une involution cyclique ayant une courbe de points unis

Lucien Godeaux

Résumé
Étude des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions ayant une courbe de points unis et leurs relations avec les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les variétés à trois dimensions contenant une involution cyclique ayant une courbe de points unis

LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Étude des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions ayant une courbe de points unis et leurs relations avec les involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique.

Dans un ouvrage récent [1], nous avons exposé la théorie des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique. Dans un appendice à cet ouvrage, nous avions donné quelques indications sur l'extension de cette théorie aux variétés algébriques à trois dimensions, en nous limitant au cas d'involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Une involution cyclique appartenant à une variété algébrique V à trois dimensions peut posséder une surface, ou une courbe, ou un nombre fini de points unis. C'est le second de ces cas que nous nous proposons d'étudier ici. On verra qu'il est en liaison étroite avec celui des involutions cycliques n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique.

Le premier point est de construire un modèle projectif de la variété V sur laquelle l'involution est engendrée par une homographie cyclique,

---

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Roma, Cremonese, 1963).

la courbe des points unis, supposée irréductible, appartenant à un axe ponctuel de cette homographie. Rappelons que dans le cas des surfaces, nous avons appelé *point uni de première espèce* un point uni dont tous les points infiniment voisins sont unis, *point uni de seconde espèce* un point uni dont seuls deux points infiniment voisins sont unis. Dans le cas des variétés à trois dimensions, une courbe unie sera dite *de première espèce* si les points où elle est rencontrée par un hyperplan sont unis de première espèce pour la surface section de V par cet hyperplan. Elle sera dite *de seconde espèce* dans le cas contraire (1).

1. Considérons une variété algébrique V à trois dimensions contenant une involution cyclique I d'ordre premier p n'ayant qu'une courbe D de points unis, courbe que nous considérerons irréductible pour simplifier l'exposé. Nous désignerons par T la transformation birationnelle de V en soi génératrice de l'involution I et nous supposerons que la courbe D est simple pour la variété V. De plus, nous supposerons que la courbe D ne contient aucun point fondamental pour T, c'est-à-dire aucun point auquel T fait correspondre soit une courbe, soit une surface.

Nous commencerons par construire un modèle projectif de la variété V sur lequel l'involution I est engendrée par une homographie cyclique.

Soit $|\,F'_1\,|$ un système linéaire de surfaces de dimension supérieure à deux, privé de points-base. Les surfaces F'_1 rencontrent la courbe D en h points. La transformation T et ses puissances font correspondre à $|\,F'_1\,|$ des systèmes linéaires privés de points-base $|\,F'_2\,|$, $|\,F'_3\,|$, ..., $|\,F'_p\,|$, qui peuvent d'ailleurs coïncider avec $|\,F'_1\,|$.

La surface

$$F'_1 + F'_2 + \cdots + F'_p \tag{1}$$

est transformée en elle-même par T et appartient à un système linéaire $|\,F\,|$, privé de points-base, et transformé en lui-même par T.

Dans ce système $|\,F\,|$, il existe un système linéaire $|\,F_0\,|$, contenant la surface (1) et tel que chacune de ses surfaces est transformée en elle-même par T. Ce système est dépourvu de points-base.

(1) Nous avons déjà consacré autrefois une note au problème étudié ici, mais sans pouvoir le conduire à terme car nous ne possédions pas alors la solution du problème concernant les involutions sur une surface. Voir: Sur les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique et possédant une courbe unie (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1938, pp. 8-14).

La surface (I) possède h points multiples d'ordre p sur la courbe D. Lorsque la surface est remplacée par une surface F_0, ces points sont remplacés par ph points simples. En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi et menons par D une surface algébrique Φ, passant simplement par la courbe. Sur cette surface, les surfaces F_0 décrivent un système linéaire dont la courbe gébérique possède des points multiples variables, ce qui est impossible d'après un théorème de Bertini [1].

Nous avons donc sur V un système linéaire $| F |$, privé de points-base, transformé en soi par T, contenant un système linéaire $| F_0 |$, privé de points-base, dont toutes les surfaces sont transformées en elles-mêmes par T. Si r est la dimension de $| F |$ et r_0 celle de $| F_0 |$, on peut toujours supposer $r > r_0$ quitte à remplacer $| F'_1 |$ par $| \lambda F'_1 |$, c'est-à-dire $| F |$ par $| \lambda F |$ et $| F_0 |$ par $| \lambda F_0 |$.

2. Rapportons projectivement les surfaces F aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions. A la variété V correspond une variété que nous désignerons encore par V. A la transformation T correspond une transformation qui échangent entre elles les sections hyperplanes de V, c'est-à-dire les hyperplans de S_r. Cette transformation est donc une homographie. On conservera la notation T.

Aux surfaces F_0 correspondent les sections F_0 de V par des hyperplans d'un système linéaire Σ_0, de dimension r_0. L'homographie T possède donc un axe ponctuel ξ_0 de dimension r_0 associé à Σ_0.

L'homographie T possède au moins deux axes ponctuels. Remarquons qu'elle transforme en lui-même le système des hypersurfaces d'ordre n de S_r et qu'on peut prendre n assez grand pour qu'il y ait p système de variétés transformées en elles-mêmes par T. Cela signifie que l'on peut supposer r assez grand pour que l'homographie T possède p axes ponctuels $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ de dimensions $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$.

Le système Σ_0 est formé des hyperplans passant pas $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$ et comme $| F_0 |$ est dépourvu de points-base, il en résulte que ces axes ne rencontrent pas la variété V. Par conséquent, les points unis de I appartiennent à l'axe ξ_0, qui coupe donc V suivant la courbe simple et irréductible D.

[1] La surface d'un système linéaire peut posséder des points multiples variables, mais le lieu de ces points est une courbe-base du système.

L'ordre de V est un multiple de p, nous le désignerons par pn.

Nous désignerons par Σ_i le système d'hyperplans passant par les axes $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$ sauf par ξ_i et par $| F_i |$ le système de surfaces que ces hyperplans découpent sur V. Le système $| F |$ contient donc p systèmes linéaires $| F_0 |, | F_1 |, \ldots, | F_{p-1} |$ composés au moyen de de l'involution I. Remarquons que les surfaces $F_1, F_2, \ldots, F_{p-1}$ passent par la courbe D.

3. Rapportons projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions ou, si l'on préfère, projetons la variété V sur l'espace ξ_0 à partir de l'espace de dimension minimum contenant $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$. Nous obtenons une variété à trois dimensions d'ordre n, Ω, image de l'involution I. Nous désignerons par Φ_0 les sections hyperplanes de Ω, elles correspondent aux surfaces F_0. Soient d'autre part $| \Phi_1 |, | \Phi_2 |, \ldots, | \Phi_{p-1} |$ les systèmes linéaires de surfaces qui correspondent aux systèmes $| F_1 |, | F_2 |, \ldots, | F_{p-1} |$.

Nous désignerons par Δ la courbe qui correspond sur Ω à D. Notre but est de déterminer la singularité de la courbe Δ pour la variété Ω.

4. Soient P un point de la courbe D et ϖ l'espace à trois dimensions tangent en P à la variété V. Cet espace ϖ est transformé en soi par T. Il contient la tangente t en P à la courbe D, droite qui appartient à ξ_0.

Dans ϖ, T détermine une homographie qui a pour axe la droite t et soit une seconde droite, soit deux points. Il en résulte que deux cas peuvent se présenter:

1° L'espace ϖ s'appuie suivant une droite sur l'un des axes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$.

2° L'espace ϖ s'appuie en un point sur deux des axes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$.

Lorsque le point P décrit la courbe D, les espaces tangents à V se comportent de la même manière vis-à-vis des espaces $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{p-1}$ par raison de continuité.

Si le premier cas se présente, nous dirons que D est une *courbe unie de première espèce*. Si c'est le second cas, que c'est *une courbe unie de seconde espèce*.

5. Nous allons en premier lieu examiner le cas où D est une courbe unie de première espèce. Nous supposerons, pour fixer les idées,

que l'espace tangent ϖ en P à V coupe l'espace ξ_1 suivant une droite t_1 (qui peut d'ailleurs varier lorsque le point P varie, mais en restant toujours dans ξ_1).

Si m est l'ordre de la courbe D, un hyperplan de Σ_0 coupe V suivant une surface F_0 contenant m points de la courbe D. Sur cette surface F_0, on a une involution I' possédant m points unis.

Soit P un de ces points. Les hyperplans de Σ_0 passent par ξ_1 donc par la droite t_1 homologue de P et celui-ci est un point uni de première espèce pour l'involution I', c'est-à-dire que les points de F_0 infiniment voisins de P sont unis.

Comme nous l'avons établi, le point de diramation P' homologue de P sur la surface Φ_0 homologue de F_0 est un point multiple d'ordre p à cône tangent rationnel.

La surface Φ_0 homologue de F_0 rencontre la courbe Δ en m points multiples d'ordre p et cette courbe est d'ordre m. En faisant varier F_0 de telle sorte qu'elle passe toujours par P, la surface Φ_0 varie en passant toujours p fois par P'. On en conclut que la courbe Δ est multiple d'ordre p pour Ω.

Si l'involution I *de la variété* V *possède une courbe unie de première espèce, la courbe de diramation correspondante sur la variété Ω est multiple d'ordre* p *pour cette variété.*

Les surfaces F_1 sont situées dans des hyperplans qui rencontrent la droite t_1 en un point, donc ces surfaces rencontrent une surface F_0 suivant une courbe ayant un point simple en P. On en conclut que les surfaces Φ_1 passent simplement par la courbe Δ.

Reprenons une surface F_0 et un point P commun à D et à cette surface. Nous avons démontré que les courbes découpées sur F par les surfaces $F_2, F_3, \ldots, F_{p-1}$ placées dans un certain ordre, passaient deux fois, trois fois, ..., $p - 1$ fois par P. On en conclut que les surfaces $\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_{p-1}$, placées dans un certain ordre, passent deux fois, trois fois, ..., $p - 1$ fois par la courbe Δ.

6. Supposons maintenant que la courbe D soit unie de seconde espèce. L'espace ϖ tangent à la variété V en un point P de D, rencontre par exemple ξ_1 en P_1 et ξ_2 en P_2. A chaque point P de D correspondent donc un point P_1 de ξ_1 et un point P_2 de ξ_2, ces points pouvant d'ailleurs varier avec le point P.

Considérons une surface $\overline{F}_0$ de $|F_0|$ et soit $\overline{\Phi}_0$ la section hyperplane de Ω qui correspond à $\overline{F}_0$. La surface $\overline{F}_0$ contient m points de D, donc la surface $\overline{\Phi}_0$ coupe Δ en m points et la courbe de diramation est d'ordre m.

Soient P un des points de rencontre de $\overline{F}_0$ avec D, P_1 le point de ξ_1, P_2 le point de ξ_2 correspondants, P' le point de Δ homologue de P.

Le plan tangent à $\overline{F}_0$ en P contient les droites PP_1, PP_2 et la courbe C, section de $\overline{F}_0$ par ce plan, possède la multiplicité $\lambda + \mu$ en P avec λ tangentes confondues avec PP_2 et μ avec PP_1. On a $\lambda + \mu < p$.

Nous introduisons deux entiers positifs α, β de la manière suivante:

Soient x, x_1, x_2 les coordonnées du plan tangent à $\overline{F}_0$ en P, les droites P_1P_2, PP_2, PP_1 ayant respectivement pour équations $x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. L'homographie T détermine dans le plan PP_1P_2 une homographie non homologique représentée par les équations

$$x' : x'_1 : x'_2 = x : \varepsilon x_1 : \varepsilon^\alpha x_2, \qquad (1 < \alpha < p)$$

ou

$$x' : x'_1 : x'_2 = x : \eta^\beta x_1 : \eta x_2, \qquad (\eta = \varepsilon^\alpha)$$

ε étant une racine primitive d'ordre p de l'unité.

On doit avoir

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

Les surfaces F_1 sections de V par les hyperplans de Σ_1, coupent la surface $\overline{F}_0$ suivant des courbes ayant un point simple en P, y touchant de ce point la droite PP_2. Ces courbes ont en commun une suite de points unis, infiniment voisins successifs de P, dont le dernier, que nous désignerons par R_2, est uni de première espèce.

De même, les surfaces F_2 sections de V par les hyperplans de Σ_2, coupent $\overline{F}_0$ suivant des courbes ayant un point simple en P, y touchant le droite PP_1 et passant par une suite de points unis infiniment voisins successifs de P dont le dernier, R_1, est uni de première espèce.

7. La structure du point uni P doit être complétée lorsque l'on a

$$\lambda + \alpha\mu = hp, \quad \mu + \beta\lambda = h'p, \qquad \text{avec} \qquad h > 1, \quad h' > 1.$$

Dans ce cas, les courbes C'_0 découpées sur $\overline{F}_0$ par les surfaces F_0 et passant par P avec la multiplicité $\lambda + \mu$ et ce point est l'origine d'une sorte d'arbre de points unis infiniment voisins successifs, dont les branches se terminent en quatre points unis de première espèce: R_1, R_2 et R'_1, R'_2.

Désignons par a, b, a', b' les multiplicités des points R_1, R_2, R'_1, R'_2 pour les courbes C'_0. Ces nombres se déterminent en appliquant la méthode indiquée dans notre ouvrage cité plus haut.

Le point de diramation P' homologue de P est multiple d'ordre $a + a' + b' + b$ pour la surface $\overline{\Phi}_0$, le cône tangent en ce point à cette surface se décomposant en quatre cônes rationnels: σ_1 d'ordre a, τ_1 d'ordre a', τ_2 d'ordre b', σ_2 d'ordre b, chacun de ces cônes rencontrant le précédent et le suivant chacun suivant une droite mais ne rencontrant pas les autres en dehors du sommet. Sur la droite commune à deux des cônes, il peut d'ailleurs exister des points doubles infiniment voisins successifs de P'.

Les courbes découpées sur F par les surfaces F_1, F_2, ... F_{p-1} passent par les points R_1, R_2, R'_1, R'_2, les premières simplement par le point R_2 et les secondes simplement par le point R_1.

Lorsque la surface $\overline{F}_0$ varie en passant toujours par P, le point P' a toujours la même multiplicité pour les surfaces $\overline{\Phi}_0$ correspondantes et il est par conséquent multiple d'ordre $a + a' + b' + b$ pour la variété Ω. Les cônes σ_1, τ_1, τ_2, τ_2 varient dans des cônes à trois dimensions de sommet P' que nous représenterons par (σ_1), (τ_1), (τ_2), (σ_2) et qui sont d'ordres a, a', b', b.

Lorsque le point P décrit la courbe D, le point P' décrit la courbe Δ qui est donc multiple d'ordre $a + a' + b' + b$ pour la variété Ω. Les cônes (σ_1), (τ_1), (τ_2), (σ_2) décrivent des variétés $((\sigma_1))$, $((\tau_1))$, $((\tau_2))$, $((\sigma_2))$ d'ordres a, a', b', b passant respectivement a, a', b', b fois par Δ.

Éventuellement, il peut exister sur Ω des suites de variétés doubles, infiniment voisines successives de Δ, la première étant commune soit aux variétés $((\sigma_1))$ et $((\tau_1))$, soit aux variétés $((\tau_1))$, $((\tau_2))$, soit aux variétés $((\tau_2))$, $((\sigma_2))$.

8. Au point de vue des transformations birationnelles, la courbe Δ est équivalente à certaines surfaces et comme dans le cas des involutions appartenant à une surface, nous aurons à considérer certaines combinaisons de ces surfaces.

A une surface F de $|F|$ correspond sur la variété Ω une surface Φ et à celle-ci correspond sur V la surface F et ses transformées par T et ses puissances. Comme F appartient à un système linéaire, Φ appartient également à un système linéaire.

Faisons varier F d'une manière continue dans $|F|$ et faisons la tendre vers une surface F_0. La surface Φ varie d'une manière continue sur Ω et tend vers une surface Φ_0 comptée p fois. On a donc

$$|\Phi| = |p\Phi_0|.$$

Faisons de même tendre la surface F vers une surface F_1. La surface Φ tend vers une surface Φ_1 comptée p fois augmentée de composantes de la courbe Δ. En désignant par Θ_1 la somme de ces composantes, on a

$$\Phi \equiv p\Phi_1 + \Theta_1.$$

On aura de même

$$p\Phi_0 \equiv p\Phi_1 + \Theta_1 \equiv p\Phi_2 + \Theta_2 \equiv \cdots \equiv p\Phi_{p-1} + \Theta_{p-1},$$

Θ_2, Θ_3, $\cdots$, Θ_{p-1} ayant une interprétation analogue à celle de Θ_1.

Le long de chacune des surfaces Φ_1, Φ_2, ..., Φ_{p-1}, il y a une hypersurface d'ordre p qui a un contact d'ordre $p-1$ avec Ω.

Remarquons que les surfaces Φ_1 par exemple, rencontrent la variété $((\sigma_2))$ suivant une bande de ∞^1 plans et que par suite l'hypersurface d'ordre p qui a un contact d'ordre $p-1$ avec Ω le long d'une surface Φ_1 a également un contact du même ordre avec la variété $((\sigma_2))$.

Nous ne continuerons pas à traiter le cas général. La méthode à suivre lorsque l'on se trouve dans un problème déterminé est d'étudier la structure des points unis des surfaces F_0 et des points de diramation correspondants des surfaces Φ_0. La solution de ce problème donne la singularité de la courbe Δ pour la variété Ω. On passera ensuite à l'étude des courbes tracées sur une surface F_0 par les surfaces F_1, F_2, ..., F_{p-1}. Toutes ces questions peuvent être résolues par l'emploi des méthodes exposées dans notre ouvrage cité au début.

Nous allons considérer deux cas particuliers.

9. Supposons $p = 3$. Si D est une courbe unie de première espèce, la courbe Δ est triple pour la variété Ω. Les surfaces Φ_1 passent simplement par Δ et les surfaces Φ_2 doublement.

Supposons que D soit une courbe unie de seconde espèce. On a $\alpha = \beta = 2$, $h = h' = 1$, $\lambda = \mu = 1$. La courbe Δ est double pour la variété Ω .

Pour les sections hyperplanes Φ_0 de Ω, les points de Δ sont des points doubles biplanaires. Il en résulte que Ω passe par Δ avec deux nappes distinctes, les cônes (σ_1), (σ_2) étant des espaces linéaires à trois dimensions, tangents à chacune des nappes de Ω. Les variétés $((\sigma_1))$, $((\sigma_2))$ touchent Ω suivant des surfaces infiniment voisines de Δ que nous désignerons par Ψ_1, Ψ_2. On a

$$3\Phi_0 \equiv 3\Phi_1 + 2\Psi_1 + \Psi_2 \equiv 3\Phi_2 + \Psi_1 + 2\Psi_2.$$

10. Nous allons maintenant supposer $p = 5$, $\alpha = \beta = 4$, $h = h' = 1$, la courbe D étant unie de seconde espèce.

Reprenons la surface $\overline{F}_0$ et soient C_0 les courbes découpées sur cette surface par les autres surfaces du système $|F_0|$, C'_0 les courbes C_0 qui passent par un point uni P de la surface.

Les courbes C'_0 ont un point double à tangentes distinctes en P, une des branches passe par trois points unis P'_1, P'_2, R_1 infiniment voisins successifs de P, l'autre branche passe par trois points unis P''_1, P''_2, R_2 infiniment voisins successifs de P. Les points R_1, R_2 sont unis de première espèce.

Appelons C''_0 les courbes C'_0 qui doivent toucher en P une droite distincte des tangentes aux courbes C'_0. Les courbes C''_0 ont en P la multiplicité 4, passent simplement par les points P'_1, P''_1 et par un point R'_1 infiniment voisin de P'_1, par un point R'_2 infiniment voisin de P''_1. Ces deux derniers points sont unis de première espèce.

Le point de diramation P' de $\overline{\Phi}_0$ est double biplanaire et par conséquent la courbe Δ est double pour Ω, cette variété passant par Δ avec deux nappes distinctes.

Au point de vue des transformations birationnelles, le point P est équivalent à quatre courbes σ_1, σ'_1, σ'_2, σ_2 qui correspondent respectivement aux points unis de première espèce R_1, R'_1, R'_2, R_2. Ces courbes ont le degré virtuel -2.

Si nous désignons par Γ'_0, Γ''_0 les courbes qui correspondent aux courbes C'_0, C''_0, nous avons sur $\overline{\Phi}_0$,

$$\Gamma'_0 \equiv \Gamma_0 - \sigma_1 - \sigma'_1 - \sigma'_2 - \sigma_2,$$
$$\Gamma''_0 \equiv \Gamma_0 - \sigma_1 - 2(\sigma'_1 + \sigma'_2) - \sigma_2.$$

On a d'autre part, sur la surface Φ_0,

$$5(\Phi_0,\ \overline{\Phi}_0) \equiv 5(\Phi_1,\ \overline{\Phi}_0) + 4\sigma_1 + 3\sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \sigma_2 + \cdots,$$
$$5(\Phi_0,\ \overline{\Phi}_0) \equiv 5(\Phi_2,\ \overline{\Phi}_0) + \sigma_1 + 2\sigma'_1 + 3\sigma'_2 + 4\sigma_2 + \cdots,$$
$$5(\Phi_0,\ \overline{\Phi}_0) \equiv 5(\Phi_3,\ \overline{\Phi}_0) + 3\sigma_1 + 6\sigma'_1 + 4\sigma'_2 + 2\sigma_2 + \cdots,$$
$$5(\Phi_0,\ \overline{\Phi}_0) \equiv 5(\Phi_4,\ \overline{\Phi}_0) + 2\sigma_1 + 4\sigma'_1 + 6\sigma'_2 + 3\sigma_2 + \cdots,$$

les termes non écrits correspondant aux autres points de diramation de Φ_0.

La courbe Δ est double pour Ω et comme on l'a vu, cette variété passe par Δ avec deux nappes distinctes. Désignons par Ψ_1 l'ensemble des points de Ω infiniment voisins de Δ situés sur une hypersurface tangente à une des nappes de Ω et par Ψ'_1 l'ensemble des points infiniment voisins de Δ situés sur une variété osculant Ω le long de la même nappe. Soient Ψ_2 et Ψ'_2 les ensembles analogues sur la seconde nappe. On a

$$5\Phi_0 \equiv 5\Phi_1 + 4\Psi_1 + 3\Psi'_1 + 2\Psi'_2 + \Psi_2,$$

$$5\Phi_0 \equiv 5\Phi_2 + \Psi_1 + 2\Psi'_1 + 3\Psi'_2 + 4\Psi_2,$$

$$5\Phi_0 \equiv 5\Phi_3 + 3\Psi_1 + 6\Psi'_1 + 4\Psi'_2 + 2\Psi_2,$$

$$5\Phi_0 \equiv 5\Phi_4 + 2\Psi_1 + 4\Psi'_1 + 6\Psi'_2 + 3\Psi_2.$$

Nous avons étudié les points unis des surfaces rencontrées ici dans une note antérieure [1].

Liège, le 13 février 1968.

[1] Sur les involutions cycliques du cinquième ordre appartenant à une surface algébrique (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1939, pp. 41-50).