GEOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.— **L. Godeaux**, *Sur les surfaces de genres un possédant deux réseaux de courbes de genre deux.* Note présentée par M. Țițeica, M.A.R., dans la séance du 19 septembre 1913 [1].

On sait que sur une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$), un système linéaire de courbes de genre p a le degré $2p-2$ et la dimension p. Un système linéaire de courbes de genre deux a donc le degré et la dimension égaux à deux; un tel système définit par suite une transformation birationnelle involutive de la surface en elle-même. Etant donnés sur une surface F de genres un, deux réseaux de genre deux, le produit des deux trans-

(1) Cette note est parvenu au Secrétariat le 7 août 1913.

formations déterminées par ces réseaux est généralement une transformation non-périodique. Ce produit peut-il être une transformation périodique? Je démontrerai dans ce travail le théorème suivant:

Si une surface de genres un possède deux réseaux de courbes de genre deux, les transformations de la surface en elle-même, déterminées par ces réseaux, ne peuvent être permutables et leur produit ne peut être une transformation de période paire.

1. Soient F une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$), $|C_1|$, $|C_2|$ deux réseaux de genre deux donnés sur cette surface, T_1, T_2 les transformations birationnelles de F en elle-même déterminées par ces réseaux. Je commencerai par démontrer que T_1, T_2 ne peuvent être permutables, c'est-à-dire qu'on ne peut avoir $T_1 T_2 = T_2 T_1$.

Considérons une courbe C_1 et soit C_1' sa transformée au moyen de T_2. C_1' est donc de genre deux. De plus, C_1' est transformée en elle-même par $T_2^{-1} T_1 T_2$, c'est-à-dire par T_1. Donc $|C_1'|$ est un réseau de genre deux composé avec l'involution d'ordre deux engendrée par T_1. Si nous indiquons par D la courbe lieu des points de F invariants pour T_1, on a $|D| = |3C_1| = |3C_1'|$.

Or, le diviseur d'une surface de genres un est $\sigma = 1$ [1], donc $|C_1|$ et $|C'_1|$ coïncident.

T_2 *(ou* T_1*) transforme* $|C_1|$ *(ou* $|C_2|$*) en lui-même.*

2. Rapportons projectivement les courbes C_1 aux droites d'un plan α. Nous obtenons un plan double birationnellement identique à F. A T_2 correspond sur α une transformation involutive changeant une droite en une droite, c'est-à-dire une homographie involutive. Celle-ci possède, comme on sait, une droite a lieu de points unis. A cette droite a correspond sur F une courbe A

(1) **Severi**, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 1908, p. 458.

qui est une courbe C_1 ou une courbe elliptique qui, jointe à une courbe rationelle, forme une courbe C_1.

Deux cas peuvent se présenter:

a. A un point de a correspond sur A un couple de points conjugués par rapport à T_1 et à T_2; ou

b. A un point de a correspondent sur A deux points conjugués par rapport à T_1, mais invariants pour T_2.

Dans le premier cas, T_1 transforme une courbe C_2 en une courbe C_2' de $|C_2|$ rencontrant la C_2 considérée en deux points nécessairement situés sur A. Par deux points de A non conjugués par rapport à T_2, passe une C_2. Sa transformée par rapport à T_1 devrait aussi passer par ces points, ce qui est impossible: A est donc une courbe C_2 ou une partie de courbe C_2. Mais cela conduit à l'existence sur F d'un système de genre deux de dimension supérieure à deux si A est de genre deux, à un système linéaire de genre un qui n'est pas un faisceau si A est elliptique. Cela est impossible, donc le premier cas ne peut se présenter.

Le second cas ne peut non plus se présenter. Considérons en effet la transformation $T_3 = T_1T_2 = T_2T_1$. Elle est involutive et engendre une involution rationnelle, car elle possède plus de huit points invariants(1). De plus on a $T_1T_3 = T_3T_1$. Or les couples considérés tantôt sur A sont conjugués par rapport à T_1 et à T_3. On est donc ramené au premier cas en substituant T_3 à T_2 dans le langage. On conclut donc que:

T_1 et T_2 ne peuvent être permutables.

3. Supposons maintenant que la transformation T_1T_2 puisse être de période $2n$: $(T_1T_2)^{2n} = 1$, n étant le plus petit nombre entier positif satisfaisant à cette condition.

(1) **Godeaux**, *Mémoires de la Société des Sciences du Hainaut*, 1913, *Bulletin de l'Académie des Sciences de Belgique*, 1913.

Considérons la transformation $T_1(T_2T_1)^{n-1}$. Elle est:

a. Involutive, car on a

$$T_1(T_2T_1)^{n-1}T_1(T_2T_1)^{n-1}=T_1(T_2T_1)^{n-2}T_2(T_2T_1)^{n-1}=$$

$$=T_1(T_2T_1)^{n-2}T_1(T_2T_1)^{n-2}=\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot=1;$$

b. Permutable avec T_2, car on a

$$T_2T_1(T_2T_1)^{n-1}=(T_2T_1)^n=(T_1T_2)^n=T_1(T_2T_1)^{n-1}T_2;$$

c. Elle engendre une involution rationnelle, car tout point invariant à la fois pour T_1 et T_2, l'est pour $T_1(T_2T_1)^{n-1}$; de tels points sont en nombre supérieur à huit.

Nous venons de voir que ces trois propriétés sont incompatibles, d'où notre théorème.