EXEMPLES DE SURFACES ALGÉBRIQUES DE DIVISEUR SUPÉRIEUR A L'UNITÉ;

Par M. Lucien GODEAUX.

On sait ce qu'on doit entendre, d'après M. Severi, par *diviseur σ d'une surface algébrique* (¹). Ce diviseur est le nombre maximum des systèmes complets d'une surface algébrique, équi-sous-multiples d'un même système. C'est donc le nombre maximum des systèmes complets $\{C_1\}$, $\{C_2\}$, ... tels que

$$\{\lambda C_1\} = \{\lambda C_2\} = \ldots,$$

quels que soient $\{C_1\}$ et λ.

M. Severi, dans ses travaux, a cité plusieurs exemples de surfaces de diviseur supérieur à l'unité. Parmi ceux-ci, il convient de citer l'exemple de la surface de genre zéro et de bigenre un

$$(p_a = P_3 = 0,\ P_2 = 1),$$

découverte par M. Enriques (²), et dont un modèle projectif est la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. C'est l'étude de cet exemple qui nous a conduits à la construction de surfaces pour lesquelles on a $\sigma \geqq 3$. D'une façon plus précise, nous démontrerons, dans cette Note, le théorème suivant :

La surface dont les équations sont

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_{\frac{1}{2}(p-1)} \\ X_1^2 & X_2 & X_3 & \ldots & X_{\frac{1}{2}(p+1)} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$X_{\frac{1}{2}(p+3)}^p = \varphi\left(X_0, X_1, \ldots, X_{\frac{1}{2}(p+1)}\right),$$

φ étant une fonction rationnelle et entière à coefficients généraux et p étant premier, est une surface de diviseur $\sigma = p$.

(¹) F. Severi, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1908, et *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1910.

(²) F. Enriques, *Memorie della Società italiana delle Scienze*, 1906.

L. G.

1. Considérons le plan p-uple cyclique

$$z^p = \varphi\left(y^p, y^{\frac{1}{2}(p-1)}x, \ldots, y^{\frac{1}{2}(p-2i-1)}x^{2i+1}, \ldots, yx^{p-2}, x^p\right),$$

p étant un nombre premier et φ étant une fonction rationnelle et entière, à coefficients généraux, de ses $\frac{1}{2}(p+3)$ variables.

Dans ces conditions, le plan p-uple envisagé est une surface régulière ($p_a = p_g$) et son diviseur est, en général, $\sigma = 1$.

Cette surface, que nous désignerons par F, admet plusieurs transformations birationnelles cycliques en elle-même; parmi ces transformations, nous distinguerons celle qui est définie par les formules

$$(\mathrm{T}) \qquad x' = \varepsilon x, \qquad y' = \varepsilon^2 y, \qquad z' = z,$$

ε étant une racine primitive p-uple de l'unité. Cette transformation T engendre une involution I_p d'ordre p. Le groupe de I_p contenant le point (x, y, z) contient, en outre, les $p - 1$ points

$$(\varepsilon x, \varepsilon^2 y, z), \quad (\varepsilon^2 x, \varepsilon^4 y, z), \quad \ldots, \quad (\varepsilon^{p-1} x, \varepsilon^{p-2} y, z).$$

L'involution I_p ne possède aucun point de coïncidence. En effet, s'il y avait de ces points, ceux-ci ne pourraient être qu'aux points unis de la transformation cyclique ($x' = \varepsilon x$, $y' = \varepsilon^2 y$, $z' = z$). Or, la fonction φ étant à coefficients généraux, la surface F ne passe pas par ces points, donc :

L'involution I_p est dépourvue de points de coïncidence.

2. Considérons une surface normale Φ, image de l'involution I_p dont il vient d'être question. Remarquons immédiatement que la surface F étant régulière, il en est de même de la surface Φ.

Soit $|\Gamma_1|$ le système des sections hyperplanes de Φ (système complet puisque Φ est normale). Aux courbes Γ_1 correspondent, sur F, des courbes que nous désignerons par C_1 et qui appartiennent à un système complet $|C|$, en général plus ample que $|\Gamma_1|$.

Si $|\Gamma_1|$ et $|C|$ avaient la même dimension, il suffirait de prendre, au lieu de $|\Gamma_1|$, un multiple suffisamment élevé, $|\lambda\Gamma_1|$, pour que la dimension de $|\lambda C|$ soit supérieure à celle de $|\lambda\Gamma_1|$. On peut donc supposer, sans restriction, que la dimension de $|C|$ est supérieure à celle de $|\Gamma_1|$.

La transformation T change $|C|$ en lui-même et, parmi les courbes C, il y en a, telles les C_1, que T change en elles-mêmes.

Ces courbes forment des systèmes incomplets $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_k|$.

A une courbe de l'un de ces systèmes correspond, sur Φ, une courbe dépourvue de points doubles (en des points simples de Φ) engendrant un système linéaire complet. Nous désignerons par $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|$, ..., $|\Gamma_k|$ les systèmes qui correspondent, sur Φ, aux systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_k|$ respectivement.

A une courbe C quelconque correspond, sur Φ, une courbe dotée d'un certain nombre de points doubles variables et qui appartient au système $|p\Gamma_1|$. En effet, lorsque C varie dans $|C|$ d'une manière continue et devient une courbe C_1, la courbe homologue de C sur Φ devient une courbe $p\Gamma_1$. De même, on voit que si C devient une courbe C_2, son homologue sur Φ se réduit à une courbe $p\Gamma_2$. Par suite, on a

$$|p\Gamma_1| = |p\Gamma_2| = \ldots = |p\Gamma_k|.$$

3. M. Severi, dans le dernier travail cité plus haut, a démontré que, si σ est le diviseur d'une surface algébrique et s'il existe des systèmes complets tels que

$$|\lambda H_1| = |\lambda H_2| = \ldots = |\lambda H_n|,$$

n est le plus grand dénominateur commun de σ et de λ.

Appliquons ce théorème à la surface Φ. Le système $|\Gamma_2|$ existe certainement, car $|C|$ ayant une dimension supérieure à celle de $|\Gamma_1|$, T agit sur les éléments de $|C|$ comme une homographie sur les points d'un espace, et il y a au moins deux systèmes de courbes transformées en elles-mêmes. On a donc $k \geqq 2$. D'autre part, p étant premier et k devant diviser p et σ, on a nécessairement $k = p$ et σ est multiple de p.

Supposons qu'il soit possible de trouver, sur Φ, deux systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma'_1|$ tels que

$$|\mu\Gamma_1| = |\mu\Gamma'_1|,$$

μ étant différent de p; alors, les nombres C_1, C'_1 qui correspondent sur F respectivement aux courbes Γ_1, Γ'_1 appartiennent respectivement à des systèmes linéaires $|C|$, $|C'|$ différents. Pour ces systèmes, on a nécessairement $|\mu C| = |\mu C'|$. Mais cela implique que le diviseur de F est supérieur à l'unité, ce qui n'a pas lieu en général. On doit donc avoir $\mu = 1$ et, par suite, d'après la définition du diviseur, $\sigma = p$.

Le diviseur de Φ est $\sigma = p$.

4. Il nous reste à chercher les équations de Φ. Pour cela, remarquons que les courbes

$$\begin{aligned} & y^p + a_0 y^{\frac{1}{2}(p-1)} x + a_1 y^{\frac{1}{2}(p-3)} x^3 + \ldots \\ & \quad + a_i y^{\frac{1}{2}(p-2i-1)} x^{2i+1} + \ldots + a_{\frac{1}{2}(p+1)} x^p + a' = 0 \end{aligned}$$

forment un système linéaire, sans points-base, de degré p^2 et sont invariantes pour T. En rapportant projectivement ces courbes aux plans d'un espace linéaire à $\frac{1}{2}(p+3)$ dimensions, on obtiendra par suite un modèle projectif de Φ sous forme d'une surface d'ordre p, comptée p fois. Cela revient à poser

$$X_0 = y^p, \qquad X_1 = y^{\frac{1}{2}(p-1)} x, \qquad \ldots, \qquad X_{i+1} = y^{\frac{1}{2}(p-2i-1)} x^{2i+1}, \qquad \ldots,$$
$$X_{\frac{1}{2}(p-1)} = y x^{p-2}, \qquad X_{\frac{1}{2}(p+1)} = x^p, \qquad X_{\frac{1}{2}(p+3)} = z.$$

On a alors

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} = \ldots = \frac{X_{\frac{1}{2}(p-1)}}{X_{\frac{1}{2}(p+1)}} = \frac{y}{x^2},$$
$$\frac{X_0}{X_1^2} = \frac{y}{x_2},$$
$$X^p_{\frac{1}{2}(p+3)} = \varphi\left(X_0, X_1, \ldots, X_{\frac{1}{2}(p+1)}\right).$$

On en déduit les équations de Φ sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_{\frac{1}{2}(p-1)} \\ X_1^2 & X_2 & X_3 & \ldots & X_{\frac{1}{2}(p+1)} \end{matrix} \right\| = 0,$$
$$X^p_{\frac{1}{2}(p+3)} = \varphi\left(X_0, X_1, \ldots, X_{\frac{1}{2}(p+1)}\right).$$

(Extrait du *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXXIX, août 1915.)

56081 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.