Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques déduites des équations d'une surface de Veronese

Lucien Godeaux

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques déduites des équations d'une surface de Veronese

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Lorsque, dans l'équation d'une surface de Steiner, on remplace les coordonnées courantes par des formes du second degré à quatre variables homogènes, on obtient une surface de genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$ et de diviseur de Severi égal à deux (1). Lorsque l'on remplace les coordonnées courantes par des formes du second degré à cinq variables homogènes, on obtient une variété à trois dimensions de genres zéro et de bigenre un (2).

La surface de Steiner est la projection d'une surface de Veronese et on est conduit à faire la même opération sur les équations d'une telle surface. Si l'on remplace dans les équations d'une surface de Veronese les coordonnées courantes par des formes algébriques à six variables homogènes, du second degré, on obtient une surface de genres $p_a = p_g = 55$, $p^{(1)} = 9.2^5 + 1$, de diviseur de Severi deux (3). Nous nous proposons d'étudier les variétés algébriques obtenues en remplaçant les coordonnées courantes par des formes du second degré à sept, huit ou neuf variables homogènes. Ces variétés paraissent posséder des propriétés intéressantes. Nous utilisons dans ce but la théorie des involutions cycliques (4).

1. Considérons dans un espace S_9 à neuf dimensions formé par la réunion d'un plan (y) et d'un espace à six dimensions (x) l'homographie involutive H d'équations

$$\rho x'_i = x_i,\ \rho y'_k = -y_k,\ (i = 0, 1, \ldots, 6\ ;\ k = 0, 1, 2).$$

Si nous représentons par φ_{ik} une forme quadratique en x, les équations

$$y_i y_k = \varphi_{ik}(x_0, x_1, \dots, x_6), \qquad (i,k = 0, 1, 2) \tag{1}$$

représentent une variété algébrique V_3 à 3 dimensions, d'ordre 2^6, transformée en soi par l'homographie H. Celle-ci détermine sur V_3 une involution I, d'ordre deux, possédant 2^6 points unis, intersections dans l'espace (x) des hyperquadriques

$$\varphi_{ik}(x_0, x_1, \dots, x_6) = 0.$$

Les adjointes à la variété V_3 sont les hyperquadriques de l'espace. Désignons par F des sections de V_3 par des hyperquadriques, c'est-à-dire les surfaces canoniques de la variété.

Les caractères du système canonique $|F|$ sont
Le degré $\Omega_0 = 2^9$,
Le genre sectionnel $\Omega_1 = 3.2^8 + 1$,
Le genre arithmétique (5) $\Omega_2 = 11.2^5 - 1$.

Le nombre des hyperquadriques de S_6 linéairement indépendantes est 55 ; si on en défalque les six hyperquadriques (1) définissant V_3, on voit que le genre arithmétique de cette variété est $P_a = 49$.

La formule de Severi (6).

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4 \tag{2}$$

est vérifiée identiquement.

2. Pour obtenir une image V_3' de l'involution I, il suffit de projeter la variété V_3 du plan (y) sur l'espace (x). Les équations de la variété V_3' seront donc obtenues en écrivant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \varphi_{02} \\ \varphi_{01} & \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{02} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

est de caractéristique un.

La variété V_3' est d'ordre 2^5 et les 2^6 points qui annulent tous les termes du déterminant précédent et qui sont les points de diramation pour la correspondance (1,2) existant entre V_3' et V_3, sont quadruples pour la variété V_3'.

3. On peut obtenir un autre modèle projectif de la variété V_3 de la manière suivante :

Les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H forment deux systèmes linéaires. L'un est formé des hyperquadriques ne passant pas par les axes de l'homographie H, elles sont au nombre de $6 + 28 = 34$. Nous désignerons par F_0 les surfaces F découpées sur V_3 par ces hyperquadriques.

L'autre système est formé des hyperquadriques passant par les axes de l'homographie H. Elles sont au nombre de 21. Soient F_1 les surfaces F découpées sur V_3 par ces hyperquadriques.

Les surfaces F_0 ne passent pas par les points unis de l'involution I mais les surfaces F_1 contiennent ces points.

Rapportons projectivement les hyperquadriques du premier système aux hyperplans d'un espace linéaire S_{33} à 33 dimensions en posant

$$\rho\, X_{ik} = x_i x_k, \qquad (i, k = 0, 1, \dots, 6),$$

$$\rho\, Y_{ik} = y_i y_k, \qquad (i, k = 0, 1, 2).$$

Nous obtenons une variété V_9 image de l'involution engendrée par H dans S_9 dont les équations s'obtiennent en exprimant que les déterminants

$$|\, Y_{ik} \,|, \qquad (i, k = 0, 1, 2), \tag{4}$$

$$|\, X_{ik} \,|, \qquad (i, k = 0, 1, \dots, 6) \tag{5}$$

sont de caractéristique un.

Les équations (4) représentent, dans un espace σ_5 à cinq dimensions, une surface de Veronese M_2^4 d'ordre quatre et les équations (5) une variété de Veronese M_6^{64} d'ordre 64 située dans un espace σ_{27} à 27 dimensions.

La variété V_9 est le lieu des droites joignant les points des variétés M_2^4 et M_6^{64}. Elle est d'ordre 256 et passe 64 fois par M_2^4 et quatre fois par M_6^{64}.

Aux hyperquadriques (1) correspondent dans S_{33} six hyperplans ayant en commun un espace linéaire S_{27} à 27 dimensions, qui coupe V_9 suivant une variété V_3'' image de l'involution I.

L'espace S_{27} coupe la variété M_6^{64} suivant 64 points qui sont les points de diramation pour la correspondance (1,2) entre les variétés V_3'' et V_3. Chacun d'eux est quadruple pour la variété V_3'', le cône tangent projetant M_2^4 de ce point.

4. Les surfaces F_0 forment un système de dimension 27, il leur correspond les sections hyperplanes Φ_0 de V_3''.

Appelons Ω_0', Ω_1', Ω_2' le degré, le genre sectionnel et le genre arithmétique des surfaces F_0. On a

$$\Omega_0' = 2^8,\ \Omega_1' = 3.2^6 + 1,\ \Omega_2' = 11.2^5 - 1.$$

Le système canonique de la variété V_3'' est constitué soit par les surfaces Φ_0, soit par les surfaces Φ_1 homologues des surfaces F_1. La dimension du premier système est 27 et celle du second 20.

Si $|\Phi_0|$ était le système canonique de V_3'', le nombre

$$\Omega_0' - \Omega_1' + \Omega_2' + 4$$

devrait être égal à 2.28. Or il est égal à 25, donc le système $|\Phi_0|$ n'est pas le système canonique de V_3''.

5. Le système canonique de V_3'' est donc $|\Phi_1|$. C'est ce que nous allons vérifier.

Les surfaces Φ_1 correspondent aux sections de V_3 par les hyperquadriques d'équation

$$\Sigma\lambda_{ik}y_ix_k = 0, \qquad (i = 0, 1, 2\ ;\ k = 0, 1, \ldots, 6).$$

En élevant les deux membres de cette équation au carré, on en déduit

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}Y_{ij}X_{kh} = 0, \qquad (i, j = 0, 1, 2\ ;\ k, h = 0, 1, \ldots, 6). \qquad (6)$$

Observons que chacun des points de diramation de V_3'' équivaut à une surface rationnelle. Appelons Δ la somme des surfaces rationnelles équivalentes aux 64 points de diramation de V_3''. D'après la théorie des involutions, on a

$$2\Phi_0 \equiv 2\Phi_1 + \Delta$$

de sorte que les hyperquadriques (6) touchent la variété V_3'' le long de surfaces Φ_1.

Appelons Ω_0'', Ω_1'', Ω_2'' le degré, le genre sectionnel et le genre arithmétique des surfaces Φ_1. On a

$$\Omega_0'' = 7.2^5,\ \Omega_1'' = 23.2^4 + 1,\ \Omega_2'' = 23.2^3 - 1,$$

d'où

$$\Omega_0'' - \Omega_1'' + \Omega_2'' + 4 = 42 = 2.21.$$

On en conclut que $|\Phi_1|$ est le système canonique de V_3'' et le genre arithmétique de cette variété est donc $P_a = 21$.

6. Observons que les équations (1) peuvent s'écrire

$$Y_{ik} = \Phi_{ik}(X_{00 1}X_{01}, \ldots, X_{66}), \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

où le second membre est la forme linéaire obtenue en remplaçant dans φ_{ik}, x_0^2, x_0x_1, ..., x_6^2 par X_{00}, X_{01}, ..., X_{66}.

On en déduit qu'une image de l'involution I a pour équations celles que l'on obtient en écrivant que les déterminants

$$|\Phi_{ik}|, \qquad (i, k = 0, 1, 2),$$

$$|X_{vik}|, \qquad (v, k = 0, 1, \ldots, 6)$$

sont de caractéristique un. Sur ce modèle projectif de la variété V_3'' le système canonique est découpé par les hypersurfaces

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}\,\Phi_{ij}X_{kh} = 0,$$

chacune d'elles touchant la variété suivant une surface canonique.

Retournons à la variété V_3. Dans l'espace des (x), il correspond à l'hypersurface (6) une hypersurface d'équation

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}\,\Phi_{ij}X_{kh} = 0,$$

touchant la variété suivant une surface canonique.

Un déterminant à neuf éléments de caractéristique un dont les éléments sont des formes quadratiques à sept variables homogènes représente, dans un espace S_6 à six dimensions, une variété à trois dimensions de genre arithmétique $P_a = 21$, possédant 64 points quadruples et d'ordre 2^5.

Liège, le 7 septembre 1967.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Sur une surface algébrique du huitième ordre* (The Tôhoku Mathematical Journal, 1933, pp. 122-126).
[2] *Une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un* (C.R., 2e sem. 1965, p. 1585) ; *Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genre géométrique zéro et de bigenre un* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermi 1965, pp. 237-246).
[3] *Construction de surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est quelconque* (Rendconti del Seminario Matematico di Padova, 1956, pp. 10-17).
[4] Voir pour un exposé de cette théorie notre ouvrage *la Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).
[5] *Sur les courbes et les surfaces intersections d'hyperquadriques* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1944, pp. 262-269).
[6] Voir Severi, *Fondamenti per la Geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 2° sem. 1909, pp. 33-87).

II

Résumé. — Étude de la variété algébrique à trois dimensions représentée par les équations d'une surface de Veronese où les coordonnées courantes sont remplacées par des polynomes du second degré à huit variables homogènes.

Nous continuons l'examen des variétés déduites des équations d'une surface de Veronese lorsque l'on remplace les coordonnées courantes par des formes du second degré à sept variables indépendantes. Nous partons d'une variété à quatre dimensions section de six hyperquadriques d'un espace S_{10} à dix dimensions formé par la réunion d'un plan (y) et d'un espace (x) à sept dimensions ne se rencontrant pas. Nous supposons que cette variété est transformée en soi par une homographie harmonique ayant pour axes le plan (y) et l'espace (x). La variété image de l'involution engendrée sur la variété par cette homographie nous donne le théorème suivant :

Si l'on exprime que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \varphi_{02} \\ \varphi_{01} & \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{02} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un, les éléments étant des formes quadratiques à huit variables homogènes, linéairement indépendantes, on obtient une variété à quatre dimensions, d'ordre 2^5, possédant une courbe quadruple d'ordre 2^6. Les variétés canoniques de cette variété sont d'ordre 2^4 et appartiennent aux variétés

$$\lambda_0\varphi_{00} + \lambda_1\varphi_{01} + \lambda_2\varphi_{02} = 0,$$

$$\lambda_0\varphi_{01} + \lambda_1\varphi_{11} + \lambda_2\varphi_{12} = 0,$$

$$\lambda_0\varphi_{02} + \lambda_1\varphi_{12} + \lambda_2\varphi_{22} = 0.$$

Les variétés bicanoniques sont découpées par les hyperquadriques. La variété à les genres $P_a = P_g = 3$, $P_2 = 36$.

On remarquera que les variétés canoniques passent par la courbe quadruple, mais qu'il n'en est pas de même des variétés bicanoniques.

1. Soit, dans un espace S_{10} à dix dimensions un plan (y) et un espace (x) à sept dimensions ne se rencontrant pas. Considérons l'homographie harmonique H d'équations

$$\rho x'_i = x_i, \rho y'_k = -y_k, \quad (i = 0, 1, \ldots, 7 ; k = 0, 1, 2)$$

et la variété V_4 à quatre dimensions intersection des hyperquadriques

$$y_i y_k = \varphi_{ik}(x_0, x_1, \ldots, x_7), \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

les φ_{ik} étant des polynomes en x linéairement indépendants.

L'homographie H détermine sur la variété V_4 une involution I possédant une courbe θ de points unis intersection des hyperquadriques

$$\varphi_{ik} = 0, \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

de l'espace (x).

Sur la variété V_4, d'ordre 2^6, les variétés canoniques sont découpées par les hyperplans. Elle est régulière et a donc les genres $P_a = P_g = 11$.

2. Les hyperquadriques de S_{10} transformées en elles-mêmes par H forment deux systèmes linéaires, L'un est représenté par l'équation à cœfficients variables

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_7) + \psi'(y_0, y_1, y_2) = 0, \tag{2}$$

où les ψ sont des polynomes homogènes du second degré. Il contient 42 hyperquadriques linéairement indépendantes.

L'autre système est représenté par l'équation à cœfficients variables

$$\Sigma\lambda_{ik}\, x_i y_k = 0, \qquad (i = 0, 1, \ldots, 7\,;\, k = 0, 1, 2)$$

et contient 24 hyperquadriques linéairement indépendantes.

Pour obtenir une image de l'involution I, rapportons projectivement les hyperquadriques (2) aux hyperplans d'un espace S_{41} à 41 dimensions en posant

$$\rho X_{ik} = x_i x_k, \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, 7)$$

$$\rho Y_{ik} = y_i y_k, \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

L'involution engendrée par H dans l'espace S_{10} est représentée par les équations obtenues en écrivant que les déterminants

$$| X_{ik} |, \qquad | Y_{ik} |$$

sont de caractéristique un. Cette variété V'_{10} est donc le lieu des droites joignant les points d'une surface de Veronese M_2 située dans un espace σ_5 et les points d'une variété de Veronese M_7 d'ordre 2^7 située dans un espace σ_{35} à 35 dimensions. La variété V'_{10} est donc d'ordre 2^{10}.

Aux hyperquadriques (1) correspondent six hyperplans ayant en commun un espace S_{35} à 35 dimensions, coupant la variété V'_{10} suivant une variété V'_4 image de l'involution I.

3. Le système canonique de la variété V'_4 a pour homologue sur V_4 un des systèmes de sections hyperplans transformé en lui-même par H. L'un de ces systèmes est formé des ∞^2 hyperplans passant par l'espace (x) et l'autre des ∞^7 hyperplans passant par l'espace (y).

Considérons un hyperplan passant par l'espace (y). Il coupe V_4 suivant une variété V_3 à laquelle correspond, sur V'_4, une variété V'_3. Comme on l'a vu dans la première note, le système canonique de V'_3 correspond au système découpé sur la variété V_3 par les hyperquadriques (3).

On en conclut que sur V'_4, le système adjoint au système V'_3 est découpé par les hyperquadriques

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}Y_{ij}X_{kh} = 0, \qquad (i, j = 0, 1, 2\,;\, h, k = 0, 1, \ldots, 7)$$

Chacune de celles-ci est d'ailleurs inscrite dans les variétés V'_3 et par suite dans la variété V'_4.

Le système canonique de V'_4 s'obtiendra donc en soustrayant du système précédent les variétés V'_3. Par conséquent le système canonique de V'_4 est formé des variétés à trois dimensions homologues des hyperplans

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$$

de S_{10} passant par l'espace (x).

Les variétés canoniques de V'_4 sont donc découpées par les cônes projetant de l'espace σ_{35} les coniques de la surface M_2. Elles sont donc situées dans des espaces à 32 dimensions de S_{35} d'équations

$$\lambda_0 Y_{00} + \lambda_1 Y_{01} + \lambda_2 Y_{02} = 0,$$
$$\lambda_0 Y_{01} + \lambda_1 Y_{11} + \lambda_2 Y_{12} = 0,$$
$$\lambda_0 Y_{02} + \lambda_1 Y_{12} + \lambda_2 Y_{22} = 0.$$

La variété V'_4 a les genres $P_a = P_g = 3$, car elle est comme V_4 régulière.

4. Le système bicanonique de V'_4 contient le double du système canonique. Or, deux coniques de la surface M_2 forment une

section hyperplane de cette surface, par conséquent les variétés bicanoniques de V'_4 sont découpées par les espaces projetant les sections hyperplanes de M_2 de l'espace σ_{35}, c'est-à-dire par les sections hyperplanes de S_{35}, qui comprennent les précédentes.

Le système des sections hyperplanes de V'_4 forment donc le système bicanonique de cette variété.

Les variétés bicanoniques de V'_4 découpent sur une variété canonique V'_3 de V'_4 le système canonique de V'_3. Les sections hyperplanes des variétés canoniques de V'_4 forment le système canonique de V'_3.

5. En projetant la variété V_4 du plan (y) sur l'espace (x), on obtient une variété V''_4 image de l'involution I et dont les équations s'obtiennent en exprimant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \varphi_{02} \\ \varphi_{01} & \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{02} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un.

Cette variété, birationnellement équivalente à V'_4 est d'ordre 2^5 et possède une courbe quadruple d'ordre 2^6 dont les équations sont

$$\varphi_{00} = 0, \ \varphi_{01} = 0, \ \ldots, \ \varphi_{22} = 0.$$

Aux équations (4) correspondent les équations

$$\lambda_0\varphi_{00} + \lambda_1\varphi_{01} + \lambda_2\varphi_{02} = 0,$$
$$\lambda_0\varphi_{01} + \lambda_1\varphi_{11} + \lambda_2\varphi_{12} = 0,$$
$$\lambda_0\varphi_{02} + \lambda_1\varphi_{12} + \lambda_2\varphi_{22} = 0$$

qui représentent une variété coupant la variété $V^4_{''}$ suivant des variétés d'ordre 2^4, formant le système canonique.

Aux hyperplans de l'espace S_{35} correspondent les hyperquadriques de l'espace (x), qui découpent donc sur V''_4 les variétés bicanoniques.

On remarquera que les variétés canoniques de V''_4 (ou de V'_4) passent par la courbe quadruple de la variété, mais que les variétés bicanoniques ne contiennent pas cette courbe.

Liège, le 15 septembre 1967.

III

Résumé. — Étude de la variété à cinq dimensions obtenue lorsque l'on remplace dans les équations d'une surface de Veronese les coordonnées courantes par des formes du second degré à neuf variables homogènes.

Nous considérons actuellement dans un espace linéaire à 11 dimensions une variété V_5 à cinq dimensions intersection de six hyperquadriques et contenant une involution I du second ordre engendrée par une homographie harmonique H ayant pour axes un plan et un espace à huit dimensions. La variété V_5 ayant des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, la variété image de l'involution possède la même propriété ou est dépourvue de variété canonique. C'est la seconde alternative qui se produit et on obtient le théorème suivant :

Si l'on exprime que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \varphi_{02} \\ \varphi_{01} & \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{02} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix}$$

est de caractéristique un, les éléments étant des formes quadratiques à neuf variables homogènes linéairement indépendantes, on obtient une variété à cinq dimensions d'ordre 2^5, possédant une surface quadruple d'ordre 2^6, dépourvue de variété canonique mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro. La variété a les genres $P_a = P_g = 0$, $P_2 = 1$.

1. Considérons dans un espace S_{11} à 11 dimensions, un plan (y) et un espace à huit dimensions (x) ne se rencontrant pas. Soit une homographie biaxiale harmonique H d'équations

$$\rho x'_i = x_i,\ \rho y'_k = -y_k, \qquad (i = 0, 1, \ldots, 8\ ;\ k = 0, 1, 2)$$

ayant comme axes l'espace (x) et le plan (y).

La variété V_5 intersection des hyperquadriques

$$y_i y_k = \varphi_{ik}(x_0, x_1, \ldots, x_8), \qquad (i, k = 0, 1, 2) \tag{1}$$

où les seconds membres sont des polynomes du second degré linéairement indépendants est transformée en soi par l'homographie H. Elle est d'ordre 2^6 et contient une surface θ d'équations

$$\varphi_{ik} = 0, \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

lieu des points unis de l'involution I engendrée par H sur V_5.

Les variétés canonique et pluricanoniques de la variété V_5 sont d'ordre zéro.

2. Les systèmes linéaires d'hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H sont le premier d'équation

$$\psi(x_0, x_1, \ldots, x_8) + \psi'(y_0, y_1, y_2) = 0.$$

où les ψ, ψ' sont des polynomes du second degré et le second d'équation

$$\Sigma\lambda_{ik}x_i y_k = 0, \qquad (i = 0, 2, \ldots, 8 \,;\, k = 0, 1, 2)$$

Le premier a la dimension 50 et le second la dimension 26.

Rapportons projectivement les hyperquadriques du premier système aux hyperplans d'un espace linéaire S_{50} en posant

$$\rho X_{ik} = x_i x_k, \qquad (i, k = 0, 1, \ldots, 8)$$
$$\rho Y_{ik} = y_i y_k, \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

Nous obtenons une variété V_{11} dont les équations s'obtiennent en écrivant que les déterminants

$$| X_{ik} | \quad , \quad | Y_{ik} |$$

sont de caractéristique un. Les premières de ces équations représentent une variété de Veronese M_8 d'ordre 2^8 située dans un espace σ_{44} à 44 dimensions et les secondes, une surface de Veronese M_2 d'ordre quatre située dans un espace σ_5 à cinq dimensions.

La variété V_{11} est d'ordre 2^{10} et est le lieu des droites s'appuyant sur les variétés M_8 et M_2. Elle représente l'involution d'ordre deux engendrée dans S_{11} par l'homographie H.

La section de V_{11} par l'espace S_{44} intersection des hyperplans de S_{11} homologues des équations (1) est une variété Ω_5 image de l'involution I de V_5.

A la surface θ correspond une surface θ' quadruple pour la variété Ω_5.

3. Considérons l'hyperplan

$$\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_8 x_8 = 0 \tag{2}$$

passant par le plan (y). Il coupe V_5 suivant une surface V_4 à laquelle correspond sur Ω_5 une variété Ω_4.

D'après le résultat de la seconde note, le système canonique de cette variété est découpé par les variétés Ω_4' qui correspondent aux sections de V_5 par les

$$\mu_0 y_0 + \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 = 0 \tag{3}$$

passant par l'espace (x). Les hyperplans (2) et (3) étant certainement distincts, la variété Ω_4' ne peut contenir la variété Ω_4 et le genre géométrique de Ω_5 est $P_g = 0$. La variété étant régulière, on a également $P_a = 0$.

Le système biadjoint de Ω_4 est découpé par les variétés Ω_4'' qui correspondent aux variétés sections de V_5 par les hyperplans (2). On en conclut qu'une variété Ω_4'' coïncide avec une variété Ω_4 et que par conséquent la variété Ω_5 possède une variété bicanonique d'ordre zéro. On a $P_2 = 1$.

4. Projetons la variété V_5 de l'espace (y) sur l'espace (x). La variété obtenue a pour équations celles qui se déduisent du déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \varphi_{02} \\ \varphi_{01} & \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{02} & \varphi_{12} & \varphi_{22} \end{vmatrix}$$

en exprimant qu'il est de caractéristique un.

C'est une seconde image Ω_5' de l'involution I.

La variété Ω_5' est d'ordre 2^5 et possède une surface multiple d'ordre quatre d'équations

$$\varphi_{ik} = 0. \qquad (i, k = 0, 1, 2)$$

Elle est dépourvue de variété canonique ($P_g = P_a = 0$) et possède une variété bicanonique d'ordre zéro ($P_2 = 1$).

Liège, le 22 septembre 1967.