Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions du second ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions

Lucien Godeaux

Résumé
Recherche des relations liant les caractères d'une variété algébrique à trois dimensions d'irrégularité superficielle nulle, contenant une involution du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis, à ceux de la variété image de l'involution.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions du second ordre appartenant à une variété algébrique à trois dimensions

LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Recherche des relations liant les caractères d'une variété algébrique à trois dimensions d'irrégularité superficielle nulle, contenant une involution du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis, à ceux de la variété image de l'involution.

Dans plusieurs notes et dans l'appendice à un ouvrage récent (1), nous avons commencé l'étude des involutions cycliques appartenant à une variété algébrique à trois dimensions. Dans cette note, nous considérons une involution du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une variété à trois dimensions et nous recherchons les liaisons existant entre les caractères de cette variété et ceux de la variété image de l'involution. Nous supposons que la variété support de l'involution (et par suite la variété image) est d'irrégularité superficielle nulle, ce qui nous permet de considérer un système linéaire de surfaces régulières.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions d'irrégularité superficielle nulle, contenant une involution I du second ordre n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Désignons par T la transformation birationnelle involutive de V en soi génératrice de l'involution.

Considérons sur V un système linéaire $|F|$ de surfaces, dépourvu de points-base, de dimension r suffisamment grande, transformé en lui-même par T. Il contient deux systèmes linéaires $|F_0|$, $|F_1|$, de dimensions r_0, r_1, appartenant à l'involution I. On peut construire

(1) *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

$|F|$ de telle sorte que l'un des systèmes, par exemple $|F_0|$ soit dépourvu de points-base, les surfaces de l'autre passant par les points unis de l'involution. On a

$$r_0 + r_1 + 2 = r + 1.$$

On peut construire $|F|$ de manière que r_0 soit aussi grand qu'on le veut. Rapportons projectivement les surfaces F_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions. Il correspond à V une variété algébrique à trois dimensions Ω dont nous désignerons les sections hyperplanes par Φ_0. Soient Φ_1 les surfaces qui correspondent sur Ω aux surfaces F_1.

2. Désignons par p_a le genre arithmétique des surfaces F, par π le genre de leurs sections, par n le degré de $|F|$. Soient p'_a le genre arithmétique de Φ_0, π' le genre des sections hyperplanes de Φ_0 et par n' le degré de $|\Phi_0|$.

On a

$$n = 2n', \quad \pi = 2\pi' - 1, \quad p_a = 2p'_a + 1.$$

Dans le système canonique $|K|$ d'une surface F_0, il existe deux systèmes appartenant à l'involution I. Soient $|K_0|$, $|K_1|$ ces systèmes, $|K_0|$ étant le transformé du système canonique de la surface Φ_0 homologue de F_0. $|K_0|$ a la dimension $p'_a - 1$ et $|K_1|$ la dimension p'_a.

Le nombre de points unis de l'involution I est, comme on le verra dans un instant, multiple de 8. Nous le désignerons par 8α.

Le système canonique d'une surface F_1 a la dimension $p_a - 1 = 2p'_a$ et son genre arithmétique est $2p'_a + 1$. Si $\bar{p}_a$ est le genre arithmétique de la surface Φ_1 homologue de F_1, on a

$$12(2p'_a + 2) = 24(\bar{p}_a + 1) - 3.8\alpha,$$

relation qui montre bien que le nombre des points unis est multiple de 8. On en déduit

$$\bar{p}_a = p'_a + \alpha$$

Le genre $\bar{\pi}$ des sections des surfaces Φ_1 est

$$\bar{\pi} = \pi' + 2\alpha$$

et le degré du système $|\Phi_1|$ est $n' - 4\alpha$.

Rappelons que les 8α points de diramation de la variété Ω sont des points quadruples et que si r_0 est suffisamment grand, les sections hyperplanes d'un des cônes tangents en un de ces points sont des surfaces de Veronese.

Une surface Φ_1 a des points doubles coniques aux points de diramation de Ω.

Dans le système canonique $|\overline{K}|$ d'une surface F_1, il y a deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I, soient $|\overline{K}_0|$, $|\overline{K}_1|$. L'un, $|\overline{K}_0|$, transformé du système canonique de la surface Φ_1 homologue, a la dimension $p'_a + \alpha - 1$, l'autre, $|\overline{K}_1|$, a la dimension $p'_a - \alpha$.

Observons que les courbes $\overline{K}_0$ ne passent pas par les points unis de l'involution I.

3. Soient P_g le genre géométique de V et P'_g celui de Ω. Observons que V étant par hypothèse d'irrégularité superficielle nulle, les suface F sont régulières et leurs genres arithmétique et géométrique sont égaux. Il en est de même des surfaces Φ_0 et Φ_1, qui sont également régulières.

Le système canonique $|G|$ de V est transformé en soi par T. Il contient deux systèmes $|G_0|$, $|G_1|$ appartenant à l'involution I. Le système adjoint $|F'|$ à $|F|$ découpe sur une surface F le système canonique de dimension $p_a - 1$ de cette surface. On a

$$|F'| = |F + G|$$

et la dimension de $|F'|$ est égale à $P_g + p_a - 1$.

Si $|\Gamma_0|$, $|\Gamma_1|$ correspondent sur Ω aux systèmes $|G_0|$, $|G_1|$, l'un de ces systèmes, par exemple $|\Gamma_0|$, est le système canonique de Ω. L'adjoint $|\Phi'_0|$ à $|\Phi_0|$ a la dimension $P'_g + p'_a - 1$ et l'adjoint $|\Phi'_1|$ à $|\Phi_1|$ a la dimension $P'_g + p'_a + \alpha - 1$.

On a

$$\Phi'_0 \equiv \Phi_0 + \Gamma_0, \quad \Phi'_1 \equiv \Phi_1 + \Gamma_0.$$

A Γ_0 correspond une surface G_0, à Φ, Φ_1 des surfaces F_0, F_1, donc à Φ'_0 Φ'_1 correspondent des surfaces $\overline{F}_0$, $\overline{F}_1$ appartenant à l'involution I.

Observons que ni les courbes canoniques des surfaces Φ_0, ni celles des surfaces Φ_1 ne passent par les points de diramations de Ω, par conséquent les surfaces $\overline{F}_0$, $\overline{F}_1$ ne passent par les points unis de l'involution I.

Le système adjoint $|F'|$ à $|F|$ est transformé en soi par T et contient donc deux systèmes $|F'_0|$, $|F'_1|$ composés avec I et l'un de ces systèmes, qui contient les surfaces $\overline{F}'_0$, $\overline{F}'_1$ est dépourvu de points-base. Supposons que ce soit $|F'_0|$. Les surfaces F'_1 passent par les points unis de l'involution I.

Les surfaces F' devant découper sur une surface F_0 un système de dimension $P'_g + p'_a - 1$, il y a

$$P_g + p_a - 1 - (P'_g + p'_a - 1) = P_g - P'_g + p'_a + 1$$

de ces surfaces qui contiennent une surface F_1.

De même, il y a

$$P_g - P'_g + p'_a - \alpha + 1$$

surfaces F' qui contiennent une surface F_1.

4. La dimension du système $|F'_0|$, qui contient les surfaces $\overline{F}'_0$, $\overline{F}'_1$, est au moins égale à $P'_g + p'_a + \alpha - 1$.

Le système $|F'_1|$ découpe, sur une surface F_1, le système $|\overline{K}_1|$ de dimension p'_a et sur une surface F_0, le système $|\overline{K}_1|$ de dimension $p'_a - \alpha$. Il en résulte que le système $|F'_1|$ a une dimension au moins égale à p'_a.

D'après la théorie des homographies harmoniques, on a

$$P'_g + p'_a + \alpha - 1 + p'_a + 2 \leqslant P_g + p_a,$$

c'est-à-dire

$$P_g \geqslant P'_g + \alpha.$$

5. La relation entre le genre arithmétique P_a de V et celui P'_a de Ω s'obtient aisément lorsque l'on suppose que Ω (et par suite V) possède un système canonique.

Soient Ω_0 le degré du système canonique de V, Ω_1 le genre sectionnel et Ω_2 le genre arithmétique des surfaces canoniques. Soient Ω'_1, Ω'_0, Ω'_2 les caractères analogues pour le système canonique de Ω. On a

$$\Omega_0 = 2\Omega'_0, \quad \Omega_1 = 2\Omega'_1 - 1, \quad \Omega_2 = 2\Omega'_2 + 1$$

D'autre part, on a

$$2P_a = \Omega_0 - \Omega_1 + \Omega_2 + 4,$$
$$2P'_a = \Omega'_0 - \Omega'_1 + \Omega'_2 + 4,$$

d'où

$$2P_a = 2\Omega'_0 - 2\Omega'_1 + 1 + 2\Omega'_2 + 2 + 4 = 4P'_a - 8 + 6$$

et

$$P_a = 2P'_a - 1.$$

Liège, le 22 janvier 1968.