Bulletin de la Classe des sciences

# Congruences de courbes sur une variété algébrique à trois dimensions (seconde note)

Lucien Godeaux

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

# Congruences de courbes sur une variété algébrique à trois dimensions

(Seconde note)

LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Dans notre première note (1), nous avions établi le théorème suivant : Si une variété algébrique V à trois dimensions contient une congruence d'indice un (ou d'ordre un) de courbes C, congruence qui n'est pas birationnellement identique à une surface rationnelle ou à une surface appartenant à la classe des réglées, les surfaces canoniques de V découpent sur les courbes C des groupes canoniques de ces courbes.

Nous nous proposons de montrer que la congruence ne peut appartenir à la classe des réglées.

1. Considérons sur une variété algébrique à trois dimensions V une congruence algébrique G d'indice un, de courbes C de genre $\pi > 0$.

Les foyers de la congruence G sont des points par lesquels passent $\infty^1$ courbes de la congruence dont les tangentes en ce point forment un faisceau.

Désignons par $\Phi$ une surface dont les points représentent birationnellement les courbes de la congruence G.

Si une courbe C contient $\nu$ foyers, par le point correspondant de la surface $\Phi$ passant $\nu$ courbes rationnelles. Si $\nu > 1$, la surface $\Phi$ est rationnelle, si $\nu = 1$, elle appartient à la classe des réglées.

2. Supposons $\nu = 1$. Soient $\gamma$ les courbes rationnelles représentant les systèmes de courbes C passant par un point focal. Le lieu des

(1) Cette note est parue dans le Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1967, pp. 1148-1153.

points focaux est une courbe $\Gamma$ rencontrée en un seul point par les courbes C. Soit encore $p$ le genre du faisceau $\{\gamma\}$ sur la surface $\Phi$, c'est-à-dire le genre de la courbe $\Gamma$.

Sur la surface $\Phi$ il existe des courbes unisécantes des courbes $\gamma$ (2). Considérons trois de ces courbes $A_1$, $A_2$, $A_3$ et soit $\Phi'$ un cône normal, d'ordre $2p - 2$, d'un espace à $p$ dimensions, birationnellement identique au faisceau $\{\gamma\}$. Soient $A'_1$, $A'_2$ deux sections hyperplanes du cône et O son sommet. Il existe par hypothèse une correspondance birationnelle entre les courbes $A_1$ et $A'_1$. Entre une courbe $\gamma$ et la génératrice homologue $\gamma'$ du cône $\Phi'$, il existe une correspondance birationnelle faisant correspondre aux points $(A_1, \gamma)$, $(A_2, \gamma)$, $(A_3, \gamma)$ respectivement les points $(A'_1, \gamma')$, $(A'_2, \gamma')$, 0. Il existe donc une correspondance birationnelle entre la surface $\Phi$ et le cône $\Phi'$, que nous désignerons dorénavant par $\Phi$.

3. Les courbes C passant par un point de $\Gamma$ forment un faisceau rationnel sur une surface $F_0$ et sont représentées sur le cône $\Phi$ par une génératrice $\gamma'$.

A une section hyperplane du cône $\Phi$ correspond une surface F passant par $\Gamma$ et contenant $\infty^1$ courbes C formant un faisceaù de genre $p$. Les surfaces F forment un système linéaire de dimension $p$, $|F|$, et deux surfaces F ont en commun, en dehors de $\Gamma$, $2p - 2$ courbes C découpant sur $\Gamma$ la série canonique.

Les hyperplans passant par O contiennent $2p - 2$ génératrices du cône $\Phi$ et la surface F correspondant à cette section est formée de $2p - 2$ surfaces $F_0$. Les surfaces $F_0$ forment un faisceau $\{F_0\}$ de genre $p$.

4. Considérons un hyperplan $\xi_0$ touchant le cône $\Phi$ suivant une génératrice $\gamma'_0$. Un hyperplan $\xi$ ne passant pas par O coupe $\Phi$ suivant une courbe tangente à $\xi_0$ au point P de rencontre de $\xi$ et de $\gamma'_0$. A la génératrice $\gamma'_0$ correspond donc sur la surface F homologue de $\xi$ une courbe $C_0$ tangente en un point à la courbe $\Gamma$.

(2) Voit ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali* (Mathematische Annalen, 1899, Band LII, pp. 449-456). *Memorie scelte* (volume II; Bologna, Zanichelli, 1959).

En reprenant les notations de notre première note, rappelons que les points focaux se trouvent sur la surface

$$\frac{\partial(M,N)}{\partial(u,v)} = 0 \qquad (1)$$

et cette surface contient donc la courbe $\Gamma$. Au foyer de la courbe $C_0$ où celle-ci touche la courbe $\Gamma$, la courbe $C_0$ touche la surface (1) et ce foyer compte pour deux. Mais cela est impossible, car $C_0$ ne peut contenir qu'un foyer simple. La surface $\Phi$ ne peut donc être une surface appartenant à la classe des réglées.

Nous pouvons énoncer les théorèmes suivants :

*Si une congruence* G *d'indice un de courbes* C *tracées sur* V *est birationnellement identique à une surface* $\Phi$ *non rationnelle, elle ne possède pas de foyers et les surfaces canoniques de* V *découpent sur les courbes* C *des groupes canoniques de celles-ci.*

*Si une congruence* G *d'indice un de courbes* C *tracée sur* V *possède des foyers, elle est rationnelle.*

5. Les théorèmes précédents ont été établis dans l'hypothèse où la courbe $\Gamma$ n'est pas hyperelliptique. S'il en était autrement, les mêmes raisonnements peuvent être repris à condition de prendre pour cône $\Phi'$ :

Si $p > 2$, un cône d'ordre $4p - 4$ dans un espace à $3p - 3$ dimensions, à sections hyperplanes bicanoniques.

Si $p = 2$ un cône d'ordre six dans l'espace à quatre dimensions, dont les sections hyperplanes sont tricanoniques.

Si $p = 1$ un cône d'ordre $n$ de l'espace à $n + 1$ dimensions, à sections hyperplanes elliptiques.

Liège, le 31 janvier 1968.