Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques dépourvues de variété canonique mais possédant un système bicanonique

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de variétés algébriques privées de variété canonique mais possédant soit un système bicanonique infini, soit une variété canonique d'ordre zéro.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques dépourvues de variété canonique mais possédant un système bicanonique

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de variétés algébriques privées de variété canonique mais possédant soit un système bicanonique infini, soit une variété canonique d'ordre zéro.

On sait qu'il existe des surfaces algébriques dépourvues de courbe canonique mais possédant un système bicanonique. Telles sont par exemple la surface d'Enriques, du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, qui possède une courbe bicanonique d'ordre zéro, et la surface du septième ordre, possédant un faisceau de courbes bicanoniques de genre deux, que nous avons construite comme image d'une involution cyclique du cinquième ordre, privée de points unis, appartenant à une surface du cinquième ordre (1). La présente note a pour objet de construire des variétés algébriques analogues.

Nous démontrons que

I. *Il existe des variétés algébriques à un nombre pair* 2n *de dimensions dépourvues de variété canonique mais possédant un système bicanonique de dimension* n.

(1) *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux*, RENDICONTI DELLA ACCADEMIA NAZ. DEI LINCEI, 2e sem. 1931, pp. 479-481; *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique zéro dont le genre linéaire est égal à deux*, BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1932, pp. 26-37.

II. *Il existe des variétés algébriques dépourvues de variété canonique mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro.*

Ces théorèmes généralisent ceux relatifs aux surfaces qui viennent d'être rappelés, mais les démonstrations en sont complètement différentes. Dans le cas des surfaces régulières, entre le genre géométrique p_g d'une surface F et celui p'_g d'une surface Φ représentant une involution cyclique d'ordre p privée de points unis appartenant à F, on a la relation

$$p_g + 1 = p(p'_g + 1).$$

Si $p = p_g + 1$, on a $p'_g = 0$ et si $p_g = 1$, $p = 2$, on a $p'_g = 0$. Dans le cas des variétés algébriques, on n'a pas de relation analogue et pour démontrer les théorèmes en question, nous avons utilisé les propriétés que nous avons établies dans une note récente ([1]).

Pour démontrer le second théorème, nous considérons dans un espace linéaire à $2n + 1$ dimensions, sur la variété intersection de $n + 1$ hyperquadriques, une involution du second ordre, ayant un nombre fini de points unis et la variété image de cette involution. Elle a les genres $P_g = 0$, $P_2 = 1$ dans certains cas, cela dépend de la parité de n.

I

1. Soit dans un espace linéaire S_{2n+1} à $2n + 1$ dimensions une homographie cyclique H de période $2n + 3$

$$x'_0 : x'_1 : \cdots : x'_i : \cdots : x'_{2n+1} = x_0 : \varepsilon x_1 : \cdots : \varepsilon^i x_i : \cdots : \varepsilon^{2n+1} x_{2n+1}$$

(où ε est une racine primitive de l'unité d'ordre $2n + 3$), ayant comme éléments unis les sommets de la figure de référence.

Nous supposerons $2n + 3$ *premier*.

Soit V_{2n} une hypersurface d'ordre $2n + 3$ de S_{2n+1} transformée en elle-même par H et ne passant pas par les sommets de la figure de référence. L'homographie H détermine sur V_{2n} une involution I d'ordre $2n + 3$ privée de points unis.

Les variétés canoniques de V_{2n} sont les sections hyperplanes F de cette variété et V_{2n} a le genre géométrique $P_g = 2n + 2$. Le système

([1]) *Involutions cycliques privées de points unis appartenant à une variété algébrique complètement régulière*, Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1968, pp. 653-661.

canonique $| F |$ de V_{2n} contient $2n + 2$ variétés appartenant à l'involution I; elles sont situées dans les faces de la figure de référence et nous les désignerons par $F_0, F_1, \ldots, F_{2n+1}$, la variété F_i étant située dans l'hyperplan $x_i = 0$.

Nous désignerons par Ω une variété image de l'involution I et par $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{2n+1}$ les variétés homologues de $F_0, F_1, \ldots, F_{2n+1}$.

2. Le système bicanonique de V_{2n} est découpé par les hyperquadriques. Désignons ce système par $| Q |$, il a la dimension

$$(n + 1)(2n + 3) - 1.$$

Pour déterminer les systèmes d'hyperquadriques appartenant à l'involution I, observons que le système découpé par les hyperquadriques dont l'équation contient les termes

$$x_1 x_{2n+1}, \quad x_2 x_{2n}, \quad x_3 x_{2n-1}, \quad \cdots, \quad x_{n+1}^2$$

appartient à cette involution. Nous le désignerons par $| Q_0 |$; il a la dimension n et lorsque l'on effectue l'opération H, les termes précédents se reproduisent multipliés par ε^{2n+2}.

On peut écrire

$$| Q_0 | = | F_1 + F_{2n+1} |.$$

Considérons de même les systèmes

$$| Q_1 | = | 2F_0 |, \quad | Q_2 | = | F_0 + F_1 |, \quad \cdots, \quad | Q_{2n+1} | = | F_0 + F_{2n} |$$

et observons que le système $| Q_i |$ est découpé par des hyperquadriques dont l'équation ne contient aucun terme ayant x_i en facteur.

Les $2n + 2$ systèmes $| Q_0 |, | Q_1 |, \ldots, | Q_{2n+1} |$ appartiennent tous à l'involution I. D'après la théorie des homographies, le système $| Q |$ contient encore un système de même dimension n que les autres, appartenant à l'involution. Nous le désignerons par $| Q_{2n+2} |$. On peut former facilement l'équation des hyperquadriques qui le découpent sur V_{2n}.

Observons que lorsque l'on applique l'homographie H, les équations des hyperquadriques découpant les variétés $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{2n+1}$ se reproduisent multipliées par ε^{2n+2}, $\varepsilon^0 = 1$, $\varepsilon, \ldots, \varepsilon^{2n}$. Les équations du dernier système doivent se reproduire multipliées par ε^{2n+1} et on a

$$| Q_{2n+2} | = | F_0 + F_{2n+1} | = | F_1 + F_{2n} | = \cdots = | F_n + F_{n+1} |.$$

3. La variété F_0 appartient à l'involution I et est de dimension impaire $2n - 1$. Par conséquent son système canonique contient $2n + 3$ systèmes linéaires appartenant à l'involution. Désignons par p'_g le genre géométrique de la variété Φ_0. Parmi les $2n - 3$ systèmes appartenant à I, l'un a la dimension $p'_g - 1$ et les autres la dimension $p'_g - 2$. Le premier est découpé par $|Q_0|$, les autres par $|Q_1|$, $|Q_2|$, ..., $|Q_{2n+2}|$. Le premier système est de dimension n et les autres de dimension $n - 1$. On a donc $p'_g = n + 1$.

Le genre géométrique de F_0 est égal au nombre d'hyperquadriques linéairement indépendantes appartenant à l'hyperplan $x_0 = 0$, c'est-à-dire à $(n + 1)(2n + 1)$. On a bien

$$p_g - 1 = (2n + 3)(p'_g - 1).$$

Au système $|Q_0|$ correspond sur Ω l'adjoint $|\Phi'_0|$ à $|\Phi_0|$. Comme il découpe sur Φ_0 un système de dimension $p'_g - 1$, le système canonique $|\Phi'_0 - \Phi_0|$ n'existe pas et le genre géométrique de Ω est $P_g = 0$.

Aux systèmes $|Q_1|$, $|Q_2|$, ..., $|Q_{2n+1}|$ correspondent sur Ω les adjoints $|\Phi'_1|$, $|\Phi'_2|$, ..., $|\Phi'_{2n+1}|$ aux systèmes $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, ..., $|\Phi_{2n+1}|$.

Par contre, au système $|Q_{2n+2}|$ correspond sur Ω un système $|Q'|$ qui n'est l'adjoint à aucune variété. Ce système est le système bicanonique de Ω car parmi les $2n + 3$ systèmes linéaires partiels de $|Q|$ appartenant à l'involution I, l'un d'eux doit correspondre au système bicanonique de Ω.

La variété algébrique à 2n *dimensions représentant une involution d'ordre premier* 2n + 3 *cyclique et privée de points unis appartenant à une hypersurface d'ordre* 2n + 3 *de l'espace à* 2n + 1 *dimensions, est dépourvue de variété canonique mais possède un système bicanonique de dimension* n ($P'_2 = n + 1$).

4. Nous déterminerons également le système tricanonique de Ω.

Le système tricanonique de V_{2n} est découpé par les hypersurfaces cubiques. Pour déterminer celui de Ω, on peut observer que l'on a

$$|\Phi'_0| = |\Phi_1 + \Phi_{2n+1}|, \quad |\Phi'_1| = |2\Phi_0|, \quad \cdots, \quad |\Phi'_{2n+1}| = |\Phi_0 + \Phi_{2n}|.$$

D'autre part, le système bicanonique $|Q'|$ contient les variétés

$$\Phi_0 + \Phi_{2n+1}, \quad \Phi_1 + \Phi_{2n}, \quad \cdots, \quad |\Phi_n + \Phi_{n+1}|.$$

Le système tricanonique de Ω est donc

$$|(\Phi_0 + \Phi_{2n+1})'| = |\Phi_0' + \Phi_{2n+1}| = |\Phi_0 + \Phi_{2n+1}'| = |\Phi_1 + 2\Phi_{2n+1}|.$$

Les hypersurfaces cubiques de S_{2n+1} découpant sur V_{1n} les transformées des variétés tricanoniques de Ω ont des équations qui se reproduisent, lorsque l'on effectue H, multipliées par ε^{2n-1}.

Pour déterminer la dimension de ce système, observons qu'une variété Q_{2n+2} est l'intersection de V_{2n} et d'une hyperquadrique, donc son système canonique est découpé par les hypersurfaces cubiques et a la dimension

$$\binom{2n+4}{3} - (2n+2) - 1 = \frac{1}{3}(2n+3)(2n^2+6n+1).$$

Le genre géométrique $\bar{p}_g$ de Q_{2n+2} est donc

$$\bar{p}_g = \frac{1}{3}(2n+3)(2n^2+6n+1) + 1.$$

La variété Q_{2n+2} appartient à l'involution I et a un nombre impair de dimensions donc le genre géométrique $\bar{p}_g$ de la variété homologue Q′ est donc donné par

$$\bar{p}_g - 1 = (2n+3)(\bar{p}_g' - 1),$$

d'où

$$\bar{p}_g' = \frac{2}{3}(n+1)(n+2).$$

Observons que $2n+3$ ayant été supposé premier, n ne peut être égal à 3 et l'expression précédente est un entier.

L'adjoint à $|Q'|$ ayant la dimension $\bar{p}_g' - 1$, le trigenre de Ω est

$$P_3' = \frac{2}{3}(n+1)(n+2).$$

II

5. Considérons dans un espace linéaire S_{2n+1} à $2n+1$ dimensions une variété V_n, à n dimensions, d'ordre 2^{n+1}, intersection complète de $n+1$ hyperquadriques $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$. Nous supposerons $n > 1$.

Le système canonique de V_n est découpé par les hypersurfaces d'ordre $2(n+1) - (2n+2) = 0$, donc si V_n possède une variété canonique, elle est d'ordre zéro.

Désignons par F les variétés à $n - 1$ dimensions sections hyperplanes de V_n. Dans un hyperplan, espace à $2n$ dimensions, le système canonique de la variété F est découpé par les variétés de l'ordre $2(n + 1) - (2n + 1) = 1$, c'est-à-dire par les espaces linéaires à $2n - 1$ dimensions. On en conclut que le système $|F|$ est son propre adjoint: $|F'| = |F|$. La variété V_n possède donc une variété canonique $F' - F$, d'ordre zéro.

Les adjoints successifs à $|F|$ coïncident avec ce système et par conséquent *les variétés canonique et pluricanoniques de la variété* V_n *sont d'ordre zéro*

La variété a les genres $P_g = P_2 = \ldots = P_i = \ldots = 1$.

Les sections hyperplanes F de V_n ont le genre géométrique $2n + 1$.

6. Soit H une homographie biaxiale harmonique de S_{2n+1} dont les axes sont deux espaces σ, σ' à n dimensions. Supposons que les hyperquadriques Q_0, Q_1, ..., Q_n soient transformées en elles-mêmes par H et ne contiennent pas les axes σ, σ'. Dans ces conditions H détermine sur la variété V_n une involution I du second ordre privée de points unis.

Nous commencerons par construire un modèle projectif Ω_n de l'image de l'involution I.

Les hyperquadriques de l'espace S_{2n+1} transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes σ, σ', linéairement indépendantes, sont au nombre de $(n + 1)(n + 2)$. Rapportons projectivement ces hyperquadriques aux hyperplans d'un espace linéaire S à $(n + 1)(n + 2) - 1$ dimensions.

Aux points de l'espace σ correspondent les points d'une variété de Veronese à n dimensions Ψ, d'ordre 2^n, appartenant à un espace linéaire Σ à $\frac{1}{2}n(n + 3)$ dimensions. De même, aux points de σ' correspondent les points d'une variété de Veronese Ψ' d'ordre 2^n appartenant à un espace Σ' à $\frac{1}{2}n(n + 3)$ dimensions. Les espaces Σ, Σ' ne se rencontrent pas et déterminent complètement l'espace S.

A une droite de S_{2n+1} s'appuyant sur σ, σ' correspond une droite s'appuyant sur Ψ, Ψ' et inversement. Le lieu des droites s'appuyant sur Ψ et Ψ' est l'intersection des cônes projetant Ψ de Σ' et Ψ' de Σ. C'est une variété W_{2n+1} à $2n + 1$ dimensions, d'ordre 2^{2n}. A un couple de points homologues dans H correspondant un point de la variété W_{2n+1}.

Aux hyperquadriques $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ correspondent dans S $n+1$ hyperplans qui ont en commun un espace à $(n+1)^2 - 1$ dimensions qui coupe la variété W_{2n+1} suivant une variété Ω_n image de l'involution I; elle est d'ordre 2^{2n}.

Nous désignerons par Φ les sections hyperplanes de la variété.

7. A une variété Φ correspond sur V_n une variété du système $| 2F |$ découpée par une hyperquadrique transformée en elle-même par H et ne contenant pas les espaces σ, σ'. Nous désignerons ces variétés par $(2F)_1$.

Le système $| 2F |$ découpé sur V_n par les hyperquadriques a la dimension $2(n+1)^2 - 1$ et contient un second système linéaire appartenant à l'involution I. Nous le désignerons par $| (2F)_2 |$; il a la dimension $(n+1)^2 - 1$.

A une variété $(2F)_2$ correspond sur Ω_n une variété que nous désignerons par Φ_1. On sait, par la théorie des involutions, que les variétés Φ_1 appartiennent à des hyperquadriques qui touchent Ω_n en chaque point d'intersection. On a

$$2\Phi \equiv 2\Phi_1.$$

Le genre géométrique d'une variété de $| 2F |$ est $p_g = 2(n+1)^2 - 1$, car $| 2F |$ est comme $| F |$, son propre adjoint.

Sur une variété $(2F)_1$, il y a, dans le système canonique, découpé par les variétés 2F, deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I, L'un est découpé par les variétés $(2F)_1$ et a la dimension $(n+1)^2 - 2$, le second est découpé par les variétés $(2F)_2$ et a la dimension $(n+1)^2 - 1$.

Supposons *n impair*. Considérons deux variétés Φ et $(2F)_1$ homologues. Puisque $(2F)_1$ est de dimension paire $n-1$, au système canonique de la variété Φ correspond celui des systèmes canoniques de $(2F)_1$ appartenant à I qui a la dimension minimum, c'est-à-dire celui qui est découpé par les variétés $(2F)_1$. Mais alors, le système canonique de Φ est découpé par les surfaces Φ et le système $| \Phi |$ est son propre adjoint. Dans ces conditions, la variété Ω_n possède une variété canonique et des variétés pluricanoniques d'ordre zéro.

Si n *est impair, la variété Ω_n possède une variété canonique et des variétés pluricanoniques d'ordre zéro.*

Supposons maintenant *n pair*. Puisque $n - 1$ est impair, au système canonique de Φ correspond sur $(2F)_1$ celui des systèmes canoniques appartenant à I qui a la dimension maximum, c'est-à-dire celui qui est découpé par les variétés $(2F)_2$.

Les variétés canoniques d'une variété Φ sont donc découpées par les variétés Φ_1 et $|\Phi_1|$ est l'adjoint à $|\Phi|$. On a

$$|\Phi'| = |\Phi_1|.$$

Si n *est pair, la variété* Ω_n *est dépourvue de variété canonique,* car les systèmes $|\Phi|$ et $|\Phi_1|$ ne peuvent avoir une variété commune.

8. Considérons une variété Φ_1 et la variété $(2F)_2$ homologue. Le système canonique de $(2F)_2$ contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un, découpé par les variétés $(2F)_1$, a la dimension $(n+1)^2 - 1$, l'autre, découpé par les variétés $(2F)_2$, a la dimension $(n+1)^2 - 2$. Puisque $n - 1$ est impair, c'est à celui de ces systèmes qui a la dimension la plus grande que correspond le système canonique de Φ_1. On en conclut que l'adjoint à $|\Phi_1|$ est le système $|\Phi|$. On a donc

$$|\Phi_1'| = |\Phi|, \quad |\Phi''| = |\Phi|$$

et le système $|\Phi|$ est son propre biadjoint.

Si n *est pair,* Ω_n *possède une variété bicanonique d'ordre zéro.*

On voit que les variétés $(2i - 1)$-canoniques de Ω_n n'existent pas mais que les variétés $2i$-canoniques sont d'ordre zéro.

En résumé, *la section par un espace linéaire à* $(n+1)^2 - 1$ *dimensions de la variété W lieu des droites s'appuyant sur deux variétés de Veronese d'ordre* 2^n *dont les espaces ambiants de dimension* $\frac{1}{2}n(n+3)$ *ne se rencontrent pas, est une variété à* n *dimensions d'ordre* 2^{2n} *qui : si* n *est impair, possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, si* n *est pair, est dépourvue de variété canonique et possède une variété bicanonique d'ordre zéro*

III

9. Considérons maintenant dans l'espace S_{2n+1} une homographie biaxiale harmonique H dont les axes sont un espace σ_{n-1} à $n - 1$ dimensions et un espace σ_{n+1} à $n + 1$ dimensions. Prenons pour Q_0,

$Q_1, \ldots, Q_n$ des hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H et ne contenant pas les axes σ_{n-1}, σ_{n+1}. L'homographie H détermine sur la variété V_n une involution I du second ordre possédant 2^{n+1} points unis dans σ_{n+1}, intersection de V_n avec cet espace.

Nous construirons un modèle projectif de l'image de l'involution I par le même procédé que celui employé plus haut.

Les hyperquadriques transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les axes σ_{n-1}, σ_{n+1} forment un système linéaire de dimension $(n+1)(n+2)$. Rapportons les projectivement aux hyperplans d'un espace S à $(n+1)(n+2)$ dimensions. Aux points de σ_{n-1} correspondent ceux d'une variété Ψ de Veronese d'ordre 2^{n-1} située dans un espace Σ à $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ dimensions. Aux points de σ_{n+1} correspondent les points d'une variété Ψ' de Veronese d'ordre 2^{n+1} située dans un espace linéaire Σ' à $\frac{1}{2}(n+1)(n+4)$ dimensions. Les espaces Σ, Σ' ne se rencontrent pas et déterminent complètement S.

Aux couples de points de S_{2n+1} homologues dans H correspondent les points d'une variété W d'ordre 2^{2n}, à $2n+1$ dimensions, lieu des droites s'appuyant sur les variétés Ψ, Ψ'.

Aux hyperquadriques Q passant par V_n correspondent $n+1$ hyperplans de S ayant en commun un espace S' à $(n+1)^2$ dimensions. Cet espace coupe W suivant une variété Ω_n à n dimensions image de l'involution I.

Nous désignerons par F les sections hyperplanes de V_n et par Φ celles de Ω_n.

Aux points unis de l'involution I, qui sont dans σ_{n+1}, correspondent 2^{n+1} points de Ψ', intersections de cette variété avec Ω_n. Ces points sont multiples d'ordre 2^{n-1} pour Ω_n. En effet, soient P un point uni de I et P' le point de diramation correspondant de Ω_n. L'espace à n dimensions tangent à V_n en P contient l'axe σ_{n-1}. Le cône tangent à Ω_n en P' projette de ce point la variété Ψ_{n-1} de Veronese. Le point P' est donc bien multiple d'ordre 2^{n-1} pour Ω_n et le cône tangent en ce point appartient à un espace à $\frac{1}{2}n(n+1)$ dimensions.

10. A une section hyperplane Φ de Ω_n correspond sur V_n une variété du système $|2F|$ que nous désignerons par $(2F)_1$.

Le nombre d'hyperquadriques linéairement indépendantes de S_{2n+1} ne contenant pas V_n est égal à $2(n+1)^2$. Le système $|2F|$ étant comme $|F|$ son propre adjoint, le genre géométrique d'une variété de $|2F|$ est égal à $2(n+1)^2 - 1$.

Le système $|2F|$ contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un $|(2F)_1|$ a la dimension $(n+1)^2$, l'autre, que nous désignerons par $|(2F)_2|$, a la dimension $(n+1)^2 - 2$.

A une variété $(2F)_2$ correspond sur Ω_n une variété que nous désignerons par Φ_1. Les variétés Φ_1 passent par les 2^{n+1} points de diramation de Ω_n. On sait, par la théorie des involutions, que le long d'une variété Φ_1 il y a une hyperquadrique inscrite dans Ω_n et qu'en un point de diramation la variété Φ_1 a un point multiple d'ordre 2^{n-2} conique, le cône tangent projetant de ce point une variété de Veronese d'ordre 2^{n-2} de la variété de Veronese Ψ.

Un point de diramation de Ω_n est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle. Si l'on représente par Δ la somme de ces surfaces rationnelles, on a

$$2\Phi \equiv 2\Phi_1 - \Delta.$$

11. Considérons une surface $(2F)_1$. Le système canonique de cette surface, de dimension $2(n+1)^2 - 2$, contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I. L'un, de dimension $n(n+2)$, est découpé par les variétés $(2F)_1$ et l'autre, découpé par les variétés $(2F)_2$, a la dimension $n(n+2) - 1$.

Si *n est impair*, $n - 1$ est pair et la dimension du second système est inférieure à celle du premier, c'est donc le second système qui correspond au système canonique de la variété Φ homologue de la variété $(2F)_1$ considérée. On a

$$\Phi' \equiv \Phi_1.$$

Au contraire, si *n est pair*, on a

$$\Phi' \equiv \Phi.$$

Dans le cas où n est pair, la variété Ω_n possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Reprenons le cas où n est impair. La variété Ω_n est dépourvue de variété canonique, car les systèmes $|\Phi|$, $|\Phi_1|$ ne peuvent avoir une variété commune.

Considérons une variété $(2F)_2$ et la variété Φ_1 homologue. Le système canonique de $(2F)_2$, qui a la dimension $2(n-1)^2-2$, contient deux systèmes appartenant à l'involution I. Le premier, de dimension $(n+1)^2$ est découpé par les variétés $(2F)_1$ et le second, de dimension $n(n+2)-2$, est découpé par les variétés $(2F)_2$ et ses courbes passent par les points unis de I. On sait que le transformé du système canonique de Φ_1 est le premier de ces systèmes. D'ailleurs si le système canonique de Φ_1 était le second système, $|\Phi_1|$ serait son propre adjoint et Ω_n aurait une variété canonique d'ordre zéro, ce qui est impossible. L'adjoint à $|\Phi_1|$ est donc le système $|\Phi|$ et on a

$$|\Phi'| = |\Phi_1|, \quad |\Phi'_1| = |\Phi|, \quad |\Phi''| = |\Phi|.$$

Le système $|\Phi|$ est donc son propre biadjoint et Ω_n possède une variété bicanonique d'ordre zéro

En résumé, *la section par un espace linéaire à* $(n-1)^2$ *dimensions de la variété W lieu des droites s'appuyant sur des variétés de Veronese d'ordres* 2^{n-1}, 2^{n+1} *dont les espaces ambiants à* $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$, $\frac{1}{2}(n-1)(n+4)$ *dimensions ne se rencontrent pas, est une variété à* n *dimensions d'ordre* 2^{2n} *qui:*
si n *est impair, est dépourvue de variété canonique mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro,*
si n *est pair, possède des variétés canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.*

La variété possède 2^{n+1} *points multiples d'ordre* 2^{n-1}.

12. Supposons $n=3$. Les équations de la variété V_3 de S_7 peuvent s'écrire

$$y_0^2+y_1^2+y_2^2=\varphi(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4),$$

$$y_1y_2=\varphi_0, \quad y_2y_0=\varphi_1, \quad y_0y_1=\varphi_2,$$

où φ, φ_0, φ_1, φ_2 sont des formes algébriques du second degré en x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.

Un modèle projectif de l'image de l'involution I s'obtient en projetant V_3 du plan σ_2 sur l'espace σ_4. On obtient

$$\varphi_1^2\varphi_0^2+\varphi_2^2\varphi_0^2+\varphi_0^2\varphi_1^2=\varphi\varphi_0\varphi_1\varphi_2.$$

Nous avons montré que la variété de S_4 représentée par cette équation était dépourvue de surface canonique mais possédait une surface bicanonique d'ordre zéro [1].

Liège, le 19 juillet 1968

(1) *Une variété algébrique à trois dimensions de bigenre un*, C. R. ACADÉMIE DES SCIENCES, 2e sem. 1965; *Sur les variétés algébriques à trois dimensions de genre géométrique zéro et de bigenre un*, RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO, 1965, pp. 237-246.