Bulletin de la Classe des sciences

Sur les involutions cycliques privées de points unis appartenant à une surface irrégulière

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination du système canonique d'une surface image d'une involution cyclique privée de points unis, appartenant à une surface irrégulière.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les involutions cycliques privées de points unis appartenant à une surface irrégulière

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination du système canonique d'une surface image d'une involution cyclique privée de points unis, appartenant à une surface irrégulière.

Dans un travail déjà ancien [1], nous avons considéré une involution cyclique, privée de points unis, appartenant à une surface régulière. Nous avons démontré que le système canonique de F contenait n systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, n étant l'ordre de celle-ci. Le système canonique de la surface Φ, image de l'involution, correspond à celui de ces systèmes qui a la dimension la plus petite, les autres ayant la même dimension égale au genre arithmétique de Φ.

Nous nous proposons d'étudier l'extension de ce théorème aux surfaces irrégulières.

Supposons donc que l'involution cyclique I, d'ordre n, privée de points unis, appartienne à une surface F d'irrégularité $q > 0$. On démontre que le système canonique de F contient encore n systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. A un de ces systèmes correspond le système canonique de la surface image Φ et aux autres systèmes, qui ont la même dimension, correspondent des systèmes que l'on pourrait appeler systèmes pseudo-canoniques, dont nous déterminons la dimension.

---

[1] *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1932, pp. 672-679). Voir également notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963). Voir n° 83.

Si l'irrégularité q′ *de la surface* Φ *est inférieure à l'irrégularité* q *de* F, *la différence* q — q′ *doit être multiple de* n — 1.

Les systèmes pseudo-canoniques ont la dimension $p'_a + \frac{q - q'}{n - 1}$, p'_a *étant le genre arithmétique de* Φ.

1. Commençons par rappeler une propriété des involutions cycliques appartenant à une courbe algébrique.

Soit C une courbe algébrique de genre π contenant une involution cyclique I d'ordre n privée de points unis. Entre le genre π' de la courbe Γ image de l'involution I et le genre π de C, nous avons, par la formule de Zeuthen, la relation

$$\pi - 1 = n(\pi' - 1).$$

Nous supposerons que la courbe Γ et par suite la courbe C ne sont pas elliptiques ($\pi' > 1$).

A un groupe canonique K′ de Γ correspond sur C un groupe canonique K de cette courbe. Le système canonique | K | de C est transformé en lui-même par la transformation birationnelle T de C en soi génératrice de l'involution I. Le système | K | contient donc un certain nombre de séries linéaires partielles $|K_0|, |K_1|, \ldots, |K_x|$ appartenant à l'involution I. L'une de ces séries, par exemple $|K_0|$, est la transformée de la série canonique | K′ | de Γ. Aux séries $|K_1|, \ldots, |K_x|$ correspondent sur Γ des séries paracanoniques de dimension $\pi' - 2$. D'après la théorie des homographies, on doit avoir

$$\pi' - 1 + x(\pi' - 2) + x + 1 = \pi = n(\pi' - 1) + 1,$$

d'où $x = n - 1$.

Si une courbe algébrique de genre $\pi > 1$ *contient une involution cyclique d'ordre* n *privée de points unis, sa série canonique contient* n *séries linéaires partielles appartenant à l'involution. A ces séries correspondent sur la courbe image de l'involution, la série canonique et* n — 1 *séries paracanoniques.*

2. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre n, privée de points unis, T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution, Φ une surface image de l'involution. Nous supposerons que les surfaces F et Φ ne sont pas rationnelles et n'appartiennent pas à la classe des réglées.

Nous pouvons former sur F un système linéaire | C | privé de points-base, transformé en lui-même par T et contenant n systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{n-1}|$ appartenant à l'involution I. On peut construire | C | de telle sorte que sa dimension r et celle r_0 de $|C_0|$ soient aussi grandes que l'on veut.

Nous pouvons prendre comme modèle projectif de F la surface de S_r dont les sections hyperplanes sont les courbes C. La transformation T est alors une homographie ayant comme axes ponctuels unis $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ et nous désignerons par $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{n-1}$ les systèmes linéaires d'hyperplans unis pour T, le système Σ_i étant formé par les hyperplans passant par $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ sauf par σ_i.

Pour surface Φ, nous prendrons la surface de l'espace à r_0 dimensions dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ_0 qui correspondent aux courbes C_0. Aux systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{n-1}|$ correspondent des systèmes linéaires complets que nous désignerons par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, ..., $|\Gamma_{n-1}|$.

Si m est l'ordre de la surface Φ, l'ordre de F, c'est-à-dire le degré du système | C | est égal à mn. Les systèmes $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{n-1}|$ ont également le degré mn. Si d'autre part, les courbes Γ_0 ont le genre π, les courbes C_0 et les courbes C ont le genre $n(\pi - 1) + 1$. Les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}$ ont également le genre π.

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p_a' de Φ, nous avons la relation

$$p_a + 1 = n(p_a' + 1).$$

La surface F ne rencontre évidemment aucun des axes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$.

3. On peut supposer que le système | C | est régulier. En effet, le système canonique | K | de F est transformé en lui-même par T et il en est de même de l'adjoint

$$|C'| = |C + K|$$

au système | C |. Le système | C' | est, d'après un théorème de Picard, régulier. D'autre part, il contient n systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I. Nous pouvons donc considérer que le système | C | est régulier et non spécial, en remplaçant éventuellement | C | par son adjoint | C' |. Nous conserverons les notations primitives.

Cela étant, la dimension r de $|\,C\,|$ est donnée par le théorème de Riemann-Roch et égale à

$$r = p_a + mn - n(\pi - 1).$$

Si $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ désignent les dimensions des systèmes $|\,C_0\,|$, $|\,C_1\,|$, ..., $|\,C_{n-1}\,|$, on a, d'après la théorie des homographies,

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1} + n = r + 1.$$

Or, d'après le théorème de Riemann-Roch, on a

$$r_i \geqslant p'_a + m - \pi + 1, \text{d'où}$$

$$n(p'_a + m\,\pi + 1) + n \geqslant p_a + mn - n(\pi - 1) + 1,$$

ce qui implique que l'égalité a lieu. Les dimensions des systèmes $|\,\Gamma_0\,|$, $|\,\Gamma_1\,|$, ..., $|\,\Gamma_{n-1}\,|$ sont donc égales à $r_0 = p'_a + m - \pi + 1$.

Remarque. — Nous avons supposé que le système $|\,C\,|$ était dépourvu de points-base, mais si l'on remplace $|\,C\,|$ par son adjoint $|\,C'\,|$, il se peut que ce dernier ait des points-base si le système canonique $|\,K\,|$ en possède. Ces points-base se répartiraient en des groupes de l'involution I et il leur correspondrait des courbes tracées sur F et les raisonnements subsisteraient. Si dans nos recherches, nous avons toujours supposé le système $|\,C\,|$ dépourvu de points-base, cela n'avait une importance que dans le cas de l'existence de points unis de l'involution.

4. Le système adjoint au système $|\,C\,|$ a la dimension

$$r' = p_a + n(\pi - 1).$$

Aux systèmes $|\,\Gamma'_0\,|$, $|\,\Gamma'_1\,|$, ..., $|\,\Gamma'_{n-1}\,|$ adjoints aux systèmes $|\,\Gamma_0\,|$, $|\,\Gamma_1\,|$, ..., $|\,\Gamma_{n+1}\,|$ correspondent des systèmes

$$|\,C'_o\,|, |\,C'_l\,|, \cdots, |\,C'_{n-1}\,|$$

composés au moyen de l'involution I et appartenant à l'adjoint $|\,C'\,|$ à $|\,C\,|$. Tous ces systèmes ont la même dimension $p'_a + \pi - 1$.

Les systèmes

$$|\,\Gamma'_0 - \Gamma_0\,|, |\,\Gamma'_1 - \Gamma_1\,|, \cdots, |\,\Gamma'_{n-1} - \Gamma_{n-1}\,|$$

coïncident avec le système canonique $|\,K'\,|$ de Φ.

Soient q l'irrégularité de F, q' celle de Φ.

Les courbes Γ'_0 découpent sur une courbe Γ_0 une série appartenant à la série canonique mais de défaut q', c'est-à-dire de dimension $\pi - q' - 1$. Le système canonique $| K' |$ a donc la dimension

$$p'_a + \pi - 1 - (\pi - q') = p'_g - 1,$$

p'_g étant naturellement le genre géométrique de Φ.

Les systèmes $| \Gamma_1 |, | \Gamma_2 |, \ldots, | \Gamma_{n-1} |$ ayant la même dimension découpent sur une courbe Γ_0 des séries formées de groupes paracanoniques ayant le même défaut x. Les systèmes

$$| K'_i | = | \Gamma_i - \Gamma_0 |, (i = 1,2, \cdots, n-1)$$

ont donc la même dimension $p'_a + x$.

Si l'on applique la théorie des homographies aux systèmes $| K' |$, $| K'_1 |, \ldots, | K'_{n-1} |$, on a

$$p'_g - 1 + (n-1)(p'_a + x) + n = p_g,$$

c'est-à-dire

$$p'_a + q' - 1 + (n-1)(p'_a + x) + n = p_a + q,$$

c'est-à-dire encore

$$p'_a + q' - 1 + (n-1)(p'_a + x) + n = n(p'_a + 1) + q - 1.$$

On a donc

$$(n-1)x = q - q'.$$

Les systèmes $| K'_1 |, | K'_2 |, \ldots, | K'_{n-1} |$ pourraient être appelés systèmes pseudo-canoniques, ils ont la dimension

$$p'_a + \frac{q - q'}{n - 1}.$$

Si $q' = q$, on a $x = 0$ et les systèmes pseudo-canoniques ont la dimension p'_a. Si en particulier on a $q = 0$, on retrouve la propriété des surfaces régulières.

Si $q > q'$, la différence $q - q'$ doit être divisible par $n - 1$, condition nécessaire pour que l'involution I puisse exister.

Liége, le 24 avril 1968.