Bulletin de la Classe des sciences

Involutions cycliques privées de points unis appartenant à une variété algébrique complètement régulière

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des systèmes canoniques des variétés représentant une involution cyclique privée de points unis appartenant à une variété algébrique.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Involutions cycliques privées de points unis appartenant à une variété algébrique complètement régulière

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination des systèmes canoniques des variétés représentant une involution cyclique privée de points unis appartenant à une variété algébrique.

On sait que si une courbe de genre $\pi > 0$ contient une involution cyclique privée de points unis, d'ordre p, sa série canonique contient p séries linéaires partielles appartenant à l'involution dont l'une, de dimension $\pi' - 1$, est la transformée de la série canonique de la courbe image C' de genre π', les autres ayant la dimension $\pi' - 2$. Si une surface F contient une involution analogue, deux cas peuvent se présenter suivant que le système canonique de la surface contient p ou $p - 1$ systèmes de courbes appartenant à l'involution. Dans le premier cas, celui des systèmes qui a la dimension minimum est le transformé du système canonique de la surface F' image de l'involution. Si p_g' est le genre géométrique de F', il a la dimension $p_g' - 1$ et les autres la dimension p_g'. Dans le second cas, le système canonique de F contient $p - 1$ courbes isolées et F' est dépourvue de courbe canonique. Si une variété à trois dimensions V complètement régulière contient une involution cyclique d'ordre p privée de points unis, son système canonique contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, l'un a la dimension $P_g' - 1$, les autres la dimension $P_g' - 2$, P_g' étant le genre géométrique de la variété image de l'involution ([1]).

Cela laisse supposer que lorsque une variété algébrique V_n à n dimensions contient une involution du type indiqué, son système canonique contient soit $p - 1$ variétés canoniques isolées appartenant à l'involution, soit p systèmes linéaires partiels dont l'un est le transformé du système canonique de la variété image V'_n et a la dimension minimum si n est pair, la dimension maximum si n est impair. Nous avons pu établir ce fait lorsque l'adjoint à un système linéaire de variétés à $n - 1$ dimensions tracées sur V_n découpe sur une des variétés du système, le système canonique complet.

M. Marchionna a démontré que le système découpé sur une variété à n 1 dimensions par ses adjointes avait un défaut au plus égal à la somme des deux dernières des irrégularités de V_n ([2]). Pour notre objet, nous supposerons donc que les variétés envisagées sont complètement régulières, c'est-à-dire que toutes leurs irrégularités sont nulles. Dans ces conditions, nous établirons les théorèmes suivants:

Si une variété algébrique à n *dimensions* V_n, *complètement régulière, contient une involution cyclique d'ordre* n, *privée de points unis, et si la variété* V'_n *image de l'involution contient une variété canonique, le système canonique de* V_n *contient* p *systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution. Le transformé du système canonique de* V'_n *est, si* n *est pair, celui de ces systèmes qui a la dimension minimum, si* n *est impair, celui qui a la dimension maximum. Si* P'_g *est le genre géométrique de* V'_n, *dans le premier cas les autres systèmes ont la dimension* P'_g, *dans le second la dimension* $P'_g - 2$.

Le genre géométrique P_g *de* V_n *est donné par* $P_g = p(P'_g + 1) - 1$ *si* n *est pair, par* $P_g = p(P'_g - 1) + 1$ *si* n *est impair.*

En outre, *si* V_n *possède un système canonique et si* n *est impair,* V'_n *possède également un système canonique. Si* n *est pair,* V'_n *peut être dépourvue de système canonique et* V_n *possède alors* $p - 1$ *variétés canoniques isolées appartenant à l'involution.*

Nous reviendrons sur cette dernière propriété pour prouver l'existence de variétés dépourvues de variété canonique mais possédant un système bicanonique.

Dans cette note, nous avons repris la démonstration dans les cas des surfaces et des variétés à trois dimensions en la simplifiant de manière à faciliter l'extension aux variétés de dimension supérieure.

1. Soit F une surface algébrique régulière contenant une involution cyclique I d'ordre p privée de points unis. Soit Φ une surface image de cette involution. Elle est régulière et nous supposerons qu'elle possède une courbe canonique Γ_0 effective.

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de Φ nous avons la relation

$$p_a + 1 = p(p'_a + 1).$$

Les surfaces F et Φ étant régulières, on a $p_g = p_a$, $p'_g = p'_a$. Comme $p'_g > 0$, on a $p_g > 2p - 1$.

Soient $| C |$ le système canonique de F et C_0 la courbe qui correspond à Γ_0. Le système $| C' |$ adjoint à $| C |$ (système bicanonique) découpe sur C_0 la série canonique complète $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, $\pi = p^{(1)}$ étant le, genre linéaire de F. Dans cette série, il y a p séries linéaires partielles appartenant à l'involution I. Si l'on désigne par π' le genre linéaire de Φ, l'une de ces séries a la dimension $\pi' - 1$ et est la transformée de la série canonique de Γ_0, les autres ont la dimension $\pi' - 2$ et correspondent à des séries paracanoniques de Γ_0. Désignons pas C'_0 les courbes adjointes à $| C |$ découpant sur C_0 la première série et par $C'_1, C'_2, \ldots, C'_{p-1}$ les adjointes à $| C |$ découpant sur C_0 les autres séries.

Aux systèmes $| C'_0 |, | C'_1 |, \ldots, | C'_{p-1} |$ correspondent sur Φ des systèmes $| \Gamma'_0 |, | \Gamma'_1 |, \ldots, | \Gamma'_{p-1} |$. Le premier découpe sur Γ_0 la série canonique de cette courbe et est l'adjoint à $| \Gamma_0 |$. Le système $| \Gamma'_0 - \Gamma_0 |$ est le système canonique $| \Gamma_0 |$ de Φ; il a la dimension $r_0 - \pi' = p'_g - 1$, r_0 étant la dimension de $| C'_0 |$.

Désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ les dimensions des systèmes $| C'_1 |$, $| C'_2 |, \ldots, | C'_{p-1} |$. Ces systèmes découpent sur C'_2 des séries de dimension $\pi' - 2$ et les systèmes

$$|\Gamma_1| = |\Gamma'_1 - \Gamma_0|, |\Gamma_2| = |\Gamma'_2 - \Gamma_0|, \cdots, |\Gamma_{p-1}| = |\Gamma'_{p-1} - \Gamma_0|$$

ont respectivement les dimensions

$$r_1 - \pi' + 1, r_2 - \pi' + 1, \cdots, r'_{p-1} - \pi' + 1.$$

A ces courbes correspondent sur F des courbes canoniques.

On a

$$\Gamma'_1 - \Gamma_0 \equiv \Gamma_1, \Gamma'_1 - \Gamma_1 \equiv \Gamma_0$$

et $| \Gamma'_1 |$ est l'adjoint à $| \Gamma_1 |$. Il en résulte que la dimension du système canonique $| \Gamma_0 |$ est $r_1 - \pi' = r_0 - \pi'$, d'où $r_1 = r_0$. Plus généralement on a $r_0 = r_1 = \ldots = r_{p-1}$.

Les systèmes $| \Gamma_1 |, | \Gamma_2 |, \ldots, | \Gamma_{p-1} |$ ont la même dimension p'_a.

Si une surface régulière F *contient une involution cyclique d'ordre* p *privée de points unis, dont l'image Φ possède une courbe canonique, le système canonique de* F *contient* p *systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, celui de dimension minimum* $p'_g - 1$ *étant le transformé du système canonique de Φ, les autres ayant la dimension* p'_g,p'_g *étant le genre géométrique de Φ.*

Le genre géométrique de F *est* $p_g = p(p'_g + 1) - 1$.

2. Soit V une variété algébrique à trois dimensions, complètement régulière, contenant une involution cyclique I, d'ordre p, dépourvue de points unis. Nous supposerons que la variété image Ω de l'involution I possède une surface canonique effective Φ_0. Nous désignerons par F_0 la surface canonique de V qui correspond à Φ_0 et par $|F|$ le système canonique de V.

Sur la surface F_0 nous avons une involution cyclique privée de points unis et par suite son système canonique possède p systèmes linéaires appartenant à l'involution, l'un de dimension $p'_g - 1$, les autres de dimension p'_g,p'_g étant le genre géométrique de Φ_0.

La variété V étant complètement régulière, l'adjoint $|F'|$ à $|F|$ découpe sur une surface F et en particulier sur la surface F_0, le système canonique complet. Désignons par F'_0 les adjointes à $|F|$ qui découpent sur F_0 le système de dimension $p'_g - 1$ et par $F'_1, F'_2, \ldots, F'_{p-1}$ les adjointes qui découpent sur F_0 les systèmes de dimension p'_g.

Soient $|\Phi'_0|, |\Phi'_1|, \ldots, |\Phi'_{p-1}|$ les systèmes homologues de $|F'_0|$, $|F'_1|, \ldots, |F'_{p-1}|$ sur Ω et $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$ leurs dimensions.

Le système $|\Phi'_0|$ est l'adjoint à $|\Phi_0|$ et le système $|\Phi'_0 - \Phi_0|$ est le système canonique $|\Phi_0|$ de Ω. Il a la dimension $r_0 - p'_g$.

Les systèmes

$$|\Phi_1| = |\Phi_1 - \Phi_0|, |\Phi_2| = |\Phi'_2 - \Phi_0|, \cdots, |\Phi_{p-1}| = |\Phi'_{p-1} - \Phi_0|$$

ont respectivement les dimensions $r_1 - p'_g - 1, r_2 - p'_g - 1, \ldots, r_{p-1} - p'_g - 1$.

On a

$$\Phi'_1 - \Phi_0 \equiv \Phi_1, \Phi'_1 - \Phi_1 \equiv \Phi_0,$$

donc $|\Phi'_1|$ est l'adjoint à $|\Phi_1|$ et la dimension de Φ_0 est

$$r_i - p'_g = r_0 - p'_g,$$

d'où $r_0 = r_1$ et plus généralement $r_0 = r_1 = \ldots = r_{p-1}$.

Le système canonique $|\Phi_0|$ de Ω a la dimension

$$P'_g - 1 = r_0 - p'_g$$

et les systèmes $|\Phi_1|, |\Phi_2|, \ldots, |\Phi_{p-1}|$ la dimension $P'_g - 2 = r_0 - p'_g - 1$. Observons que l'on a, pour le genre géométrique P_g de V,

$$P_g - 1 = p(P'_g - 1).$$

Si une variété algébrique V *à trois dimensions, complètement régulière, contient une involution cyclique d'ordre* p *privée de points unis dont l'image* Ω *possède une surface canonique, le système canonique de* V *contient* p *systèmes linéaires appartenant à l'involution, celui de dimension maximum étant le transformé du système canonique de* Ω *et a la dimension* $P'_g - 1$, *les autres ayant la dimension* $P'_g - 2$, P'_g *étant le genre géométrique de* Ω.

Le genre géométrique P_g *de* V *est donné par* $P_g = p(P'_g - 1) + 1$.

3. Les résultats précédents conduisent à l'énoncé suivant:

Si une variété algébriques V_n *à* n *dimensions complètement régulière contient une involution cyclique d'ordre* p *privée de points unis dont l'image* Ω_n *contient une variété canonique, le système canonique de* V_n *contient* p *systèmes linéaires appartenant à l'involution et celui de dimension maximum ou minimum est le transformé du système canonique de* Ω_n *suivant que* n *est impair ou pair.*

Nous supposerons cet énoncé exact pour une valeur de n et le démontrerons pour la valeur $n + 1$.

4. Commençons par supposer $n = 2m + 1$ et soient Φ_0 une variété canonique de Ω_n, F_0 la variété canonique qui lui correspond sur V_n et $|F|$ le système canonique de V_n.

La variété V_n étant complètement régulière, le système canonique complet de F_0 est découpé par l'adjoint $|F'|$ à $|F|$. La variété Ω_n étant comme V_n complètement régulière, le système adjoint à Φ_0 découpe sur cette variété le système canonique complet, de dimension $p'_g - 1$, p'_g étant le genre géométrique de Φ_0. Le système canonique de la variété à $2m$ dimensions F_0 contient un système linéaire de dimensions $p'_g - 1$ transformé du système canonique de Φ_0 et $p - 1$ systèmes linéaires de dimension p'_g. Désignons respectivement par $|F'_0|, |F'_1|, \ldots, |F'_{p-1}|$ les systèmes de variétés adjointes F' découpant sur F_0 ces systèmes, et par $|\Phi'_0|, |\Phi'_1|, \ldots, |\Phi'_{p-1}|$ les systèmes qui leur correspondent sur Ω_n. Si $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$ sont les dimensions respectives de ces systèmes, le système canonique de Ω_n est

$$|\Phi'_0 - \Phi_0| = |\Phi_0|$$

et a la dimension $r_0 - p'_g$. Le système

$$|\Phi_1| = |\Phi'_1 - \Phi_0|$$

a la dimension $r_1 - (P'_g + 1)$. L'adjoint à $|\Phi_1|$ est $|\Phi'_1| = |\Phi_1 + \Phi_0|$ et les variétés F'_1 découpent sur l'homologue F_1 de Φ_1 un système de dimension $p'_g - 1$. On en conclut que le système canonique de Ω_n a la dimension $r_1 - p'_g = r_0 - p'_g$, d'où $r_1 = r_0$ et plus généralement $r_0 = r_1 = \ldots = r_{p-1}$.

Si P_g est le genre géométrique de V_n et P'_g celui de Ω_n, les dimensions des systèmes $|\Phi_0|, |\Phi_1|, \ldots, |\Phi_{p-1}|$ sont respectivement $P'_g - 1$, $P'_g - 2, \ldots, P'_g - 2$. On a en outre

$$P_g = p(P'_g - 1) + 1.$$

Ainsi se trouve démontré le théorème pour n impair dans l'hypothèse où il est vrai pour n pair.

5. Supposons maintenant $n = 2m$. Par hypothèse, la variété Ω_n possède une variété canonique Φ_0. Désignons par $|F|$ le système canonique de V_n et soit F_0 la variété canonique qui correspond à Φ_0.

La variété F_0 étant comme V_n complètement régulière, son système canonique comprend p systèmes appartenant à l'involution I et celui qui correspond au système canonique de Φ_0 est celui qui a la dimension maximum. L'adjoint $|F'|$ à $|F|$ comprend p systèmes linéaires appartenant à l'involution, $|F'_0|, |F'_1|, \ldots, |F'_{p-1}|$ découpant sur F_0 les sytèmes dont il vient d'être question. Si p'_g est le genre géométrique de Φ_0, le premier de ces systèmes découpe sur F_0 un système de dimension $p'_g - 1$ et les autres, des systèmes de dimension $p'_g - 2$.

Aux systèmes $|F'_0|, |F'_1|, \ldots, |F'_{p-1}|$ correspondent sur Ω_n des systèmes $|\Phi'_0|, |\Phi'_1|, \ldots, |\Phi'_{p-1}|$. Désignons par $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$ les dimension de ces systèmes.

Le système canonique de Ω_n est

$$|\Phi'_0 - \Phi_0| = |\Phi_0|$$

et a la dimension $r_0 - p'_g$.

Posons

$$| \Phi_1 | = | \Phi'_1 - \Phi_0 |, | \Phi_2 | = | \Phi'_2 - \Phi_0 |, \cdots, | \Phi_{p-1} | = | \Phi'_{p-1} - \Phi_0 | ;$$

ces systèmes ont respectivement les dimensions $r_1 - (p'_g - 1), r_2 - (p'_g - 1), \ldots, r_{p-1} - (p'_g - 1)$.

La première relation peut s'écrire $\Phi'_1 - \Phi_1 \equiv \Phi_0$ et $| \Phi'_1 |$ est l'adjoint à $| \Phi_1 |$. Le système $| \Phi'_1 - \Phi_1 |$ a la dimension $r_1 - p'_g$ car $| F'_1 |$ découpe sur une surface F_1 homologue de Φ_1 un système de dimension $p'_g - 1$. On a donc $r_0 = r_1$ et plus généralement $r_0 = r_1 = \ldots = r_{p-1}$.

On voit donc que les systèmes $| \Phi_1 |, | \Phi_2 |, \ldots, | \Phi_{p-1} |$ ont la dimension $r_0 - p'_g + 1$ supérieure d'une unité à celle $r_0 - p'_g$ de $| \Phi_0 |$. Le théorème est donc démontré dans le cas où n est pair.

Observons que l'on a la relation

$$P_g = p(P'_g + 1) - 1,$$

entre les genres géométriques P_g de V_n et P'_g de Ω_n.

6. Nous avons démontré que si une surface régulière F contient une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis, dont la surface image Φ est dépourvue de courbe canonique, le système canonique de F contient $p - 1$ courbes isolées, appartenant à l'involution. Une propriété analogue n'existe pas dans le cas d'une courbe et on peut supposer qu'elle n'existe pas non plus dans le cas d'une variété algébrique à trois dimensions à cause du théorème du n° 2. Nous allons démontrer qu'il en est bien ainsi.

Soit V une variété algébrique à trois dimensions, complètement régulière, contenant une involution cyclique I d'ordre p privée de points unis. Supposons que la variété image Ω soit dépourvue de surface canonique.

Nous pouvons construire sur V un système linéaire $| F |$ contenant p systèmes linéaires partiels $| F_0 |, | F_1 |, \ldots, | F_{p-1} |$ appartenant à l'involution. Désignons par $| \Phi_0 |, | \Phi_1 |, \ldots, | \Phi_{p-1} |$ les systèmes linéaires complets correspondant sur Ω.

Aux systèmes linéaires $| \Phi'_0 |, | \Phi'_1 |, \ldots, | \Phi'_{p-1} |$ respectivement adjoints à $| \Phi_0 |, | \Phi_1 |, \ldots, | \Phi_{p-1} |$ correspondent sur V des systèmes linéaires $| F'_0 |, | F'_1 |, \ldots, | F'_{p-1} |$ appartenant au système $| F' |$ adjoint à $| F |$.

Les systèmes $|\Phi'_0|$, $|\Phi'_1|$, ..., $|\Phi'_{p-1}|$ découpent sur une surface Φ_0 des systèmes linéaires complets respectivement de dimension $p'_g - 1$, p'_g, ..., p'_g, le premier étant le système canonique et p'_g étant le genre géométrique de Φ_0.

Le système canonique $|\Phi'_0 - \Phi_0|$ n'existant pas, le système $|\Phi_0|$ doit avoir la dimension $p'_g - 1$.

De même, le système $|\Phi'_1|$ doit avoir la dimension $p'_g - 1$ et ce système ne saurait découper sur Φ_0 un système de dimension p'_g. On en conclut que l'involution I ne peut exister.

Si une variété algébrique à trois dimensions complètement régulière contient une involution cyclique privée de points unis, possède un système canonique, l'image de cette involution possède également un système canonique.

La démonstration de ce théorème s'étend sans modification aux variétés algébriques à un nombre impair de dimensions. Par contre, on voit que dans le cas d'une variété à un nombre pair de dimensions, la variété contient $p - 1$ variétés canoniques isolées appartenant à l'involution. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette propriété en suivant la démonstration que nous avons donnée pour les surfaces.

Liège, le 1er juin 1968.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Voir nos publications: Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière (*Bulletin de l'Académie roy. de Belgique*, 1932, pp. 672-679), Sur les surfaces algébriques de genres nuls à courbes bicanoniques irréductibles (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1958, pp. 309-322) pour les surfaces algébriques, Sur une propriété des correspondances rationnelles entre deux variétés algébriques (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1938, pp. 291-297) pour les variétés à trois dimensions. Voir également notre volume sur Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications (Rome, Cremonese, 1963).

[2] MARCHIONNA, E., Sul teorema di Riemann-Roch relativo alle varietà algebriche (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 1° sem. 1958, pp. 396-403, 500-504, 672-679), Una dimostrazione algebrico-geometrica del teorema di Riemann-Roch relativo alla varietà algebriche classiche (*Idem*, 2° sem. 1958, pp. 160-171). Consulter également l'appendice VI au traité de SEVERI, Geometria dei sistemi algebrici sopra una superficie e sopra une varietà algebrica, tome III (Roma Cremonese, 1959) dû à M. MARCHIONNA, *Il* teorema di Riemann-Roch sulle varietà algebriche e questioni collegate con la teoria delle irregolarità, pp. 395-437. On y trouvera l'historique de la question