Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces contenant une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce

Lucien Godeaux

Résumé
Propriétés nouvelles d'une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce appartenant à une surface algébrique.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces contenant une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce

LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Propriétés nouvelles d'une involution cyclique n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce appartenant à une surface algébrique.

Dans le dessein d'étudier les involutions cycliques appartenant à une variété algébrique, nous avons repris l'étude des involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce appartenant à une surface algébrique. Nous avons établi que l'on peut prendre pour modèle projectif de la surface une surface normale appartenant à un espace de dimension aussi grande que l'on veut, sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie de période p possédant p axes ponctuels unis $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$, les points unis de l'involution appartenant à l'espace σ_0. Nous supposons p premier. Les points unis se répartissent en $p - 1$ catégories, ceux de la i-ième catégorie étant associés à l'espace σ_i en ce sens que le plan tangent à F en un de ces points rencontre σ_i suivant une droite (¹).

Les gerbes de plans de sommets $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ que nous désignerons par $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{p-1}$, découpent sur F des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$. Nous démontrons que ces courbes passent avec des multiplicités différentes (de 1 à $p - 1$) par chaque point uni. Nous en déduisons que les espaces σ_i et σ_{p-i} ont même dimension. Ensuite, on établit que les nombres des points unis des catégories i et $p - i$ sont égaux.

(¹) Voir notre ouvrage *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963).

Ces propriétés permettent d'établir l'existence d'une homographie biaxiale harmonique dont σ_0 est un axe et qui échange les espaces σ_i et σ_{p-i} $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$. Cette homographie ne peut transformer la surface F en elle-même.

Nous nous occupons ensuite des systèmes canoniques des surfaces support de l'involution et image de l'involution.

1. Soient F une surface algébrique contenant une involution cyclique I d'ordre premier p et H la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution. Nous supposerons que l'involution I ne possède qu'un nombre fini de points unis tous de première espèce, c'est-à-dire que dans le domaine de chacun de ces points, la transformation H opère comme l'identité.

On sait que l'on peut prendre comme modèle projectif de la surface F une surface d'un espace linéaire S_r à r dimensions, où r est aussi grand qu'on le veut, sur laquelle l'involution I est engendrée par une homographie H de S_r possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, les points unis de l'involution appartenant à l'axe σ_0 et les autres axes ne rencontrant pas la surface.

Nous désignerons par $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$ les dimensions des espaces $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$. Rappelons que l'on peut prendre r suffisamment grand pour que r_0 soit aussi grand qu'on le veut. On a, d'après la théorie des homographies,

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_{p-1} + p = r + 1.$$

Un point uni de l'involution appartient à σ_0 et puisque c'est un point uni de première espèce, le plan tangent à F en ce point rencontre l'un des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ suivant une droite. Nous supposerons que parmi les α points unis de l'involution, il y en a α_1 dont le plan tangent rencontre σ_1 suivant une droite, α_2 dont le plan tangent rencontre σ_2 suivant une droite, ..., α_{p-1} dont le plan tangent rencontre σ_{p-1} suivant une droite.

On désignera par $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$ les systèmes d'hyperplans unis de H conjugués respectivement aux espaces $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$. Les hyperplans de Σ_0 passent par les axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ et ceux de Σ_i passant par les axes de H distincts de σ_i.

Pour obtenir une image Φ de l'involution I, rapportons projectivement les hyperplans de Σ_0 aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions ou, si l'on veut, projetons F sur σ_0 à partir de l'espace de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$. Les points de la surface Φ correspondent aux groupes de l'involution I.

On désignera par $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$, les courbes découpées sur F par les hyperplans de $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$ et par $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_{p-1}$ les courbes qui leur correspondent sur Φ. Le système $|C_0|$ est dépourvu de points-base et correspond au système des sections hyperplanes $|\Gamma_0|$ de Φ.

Soient n l'ordre de la surface Φ et π le genre de ses sections hyperplanes Γ_0. L'ordre de la surface F est pn et le genre des sections hyperplanes C de F est égal à $p(\pi - 1) + 1$.

On sait qu'aux points unis de l'involution correspondent sur Φ des points de diramation multiples d'ordre p pour la surface, le cône tangent étant rationnel et irréductible.

Observons que d'après la construction de F, aux espaces $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ sont attachés les nombres $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^{p-1}$ où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Le choix de cette racine est indifférent et par suite l'énumération des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ est indifférente.

2. Les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ passent par les points unis de l'involution, nous allons déterminer avec quelle multiplicité en suivant la méthode que nous avons utilisée autrefois [1].

Le système $|D| = |2C|$ contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution. Nous les désignerons par $|D_0|, |D_1|, |D_2|, \ldots, |D_{p-1}|$, ils contiennent respectivement les courbes $2C_0, C_0 + C_1, C_0 + C_2, \ldots, C_0 + C_{p-1}$ qui permettent de les définir.

Soit P un point uni de l'involution, le plan tangent ω en ce point s'appuyant sur l'axe σ_1 suivant une droite. Les hyperplans de Σ_1 coupent le plan ω suivant une droite passant par P et par conséquent les courbes C_1 passent simplement par P, la tangente étant variable.

Les courbes $2C_1$ ont en P un point double. Ces courbes appartiennent à l'un des systèmes $|D_2|, |D_3|, \ldots, |D_{p-1}|$. Supposons que ce soit le système $|D_2| = |C_0 + C_2|$. Alors les courbes C_2 passent doublement par P.

[1] *Sur les points unis parfaits des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Soc. roy. des Sciences de Liège, 1937, pp. 37-40).

Les courbes $C_1 + C_2$ passent trois fois par P. On peut supposer qu'elles appartiennent au système $|D_3| = |C_0 + C_3|$. Les courbes C_3 passent donc trois fois par P.

Le raisonnement peut se poursuivre et l'on voit que l'on peut énumérer les axes de l'homographie H de telle sorte que les courbes C_1 passent une fois par P, les courbes C_2 deux fois par P, ..., les courbes C_i i fois par P, ..., les courbes C_{p-1} $p-1$ fois par P. Cette énumération des axes de H est d'ailleurs provisoire.

Plus généralement, on voit que:

Les courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ *passent avec des multiplicités différentes comprises entre* o *et* p *(limites exclues) par tout point uni de l'involution I.*

Il en résulte que *deux courbes appartenant à des systèmes* $|C_1|$, $|C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ *distincts ne peuvent avoir la même multiplicité en un point uni.*

3. Nous avons partagé les points unis de l'involution d'après l'axe de l'homographie H sur lequel s'appuie le plan tangent à F au point uni. Pour abréger, nous dirons que les α_i points unis de I en lequel les plans tangents à F s'appuient sur σ_i forment la i-ième catégorie.

Nous avons vu que les courbes C_1 passent simplement par les α_1 points unis de la première catégorie. Supposons qu'elles passent s_2 fois par les points unis de la seconde catégorie, s_3 fois par ceux de la troisième, ..., s_{p-1} fois par ceux de la dernière. Les nombres $s_2, s_3, \ldots, s_{p-1}$ sont au moins égaux à deux, car les hyperplans de Σ_1 contiennent les plans tangents aux points unis de ces catégories, et au plus égaux à $p-1$.

Les courbes C_1 correspondent à la racine ε de l'unité et les courbes C_{p-1} à la racine ε^{p-1}, donc les courbes $C_1 + C_{p-1}$ correspondent à la racine $\varepsilon^p = 1$. Les courbes $C_1 + C_{p-1}$ appartiennent donc au système $|D_0|$. Nous avons établi que les courbes C_0 ou D_0 passant par un point uni y acquièrent un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Les courbes $C_0 + C_{p-1}$ passent par tous les points unis de l'involution, et y ont la multiplicité p. Il en résulte que les courbes C_{p-1} passent $p-1$ fois par les points de la première catégorie, $p - s_2$ fois par les points de la seconde catégorie, ..., $p - s_{p-1}$ fois par les points de la $(p-1)$-ième catégorie.

Supposons que deux des nombres s puissent être égaux, par exemple

$s_i = s_k$. En reprenant le raisonnement fait plus haut et l'énumération faite des axes de H, on voit que les courbes C_i passent s_i fois par P et les courbes C_k, s_k fois par ce point, ce qui est impossible.

Il en résulte que la suite des nombres $s_2, s_3, \ldots, s_{p-1}$ est, dans un certain ordre, la suite des nombres de 2 à $p - 1$. Nous pouvons changer une nouvelle fois l'énumération des axes de l'homographie H de manière à avoir $s_2 = 2$, $s_3 = 3$, ..., $s_{p-1} = p - 1$. Alors, les courbes C_{p-1} passent $p - 1$ fois par les points de la première catégorie, $p - 2$ fois par les points de la seconde, ..., une fois par les points de la dernière. Les courbes C_1, C_{p-1} ont par suite le même genre.

A l'ordre des points près, les courbes C_1 et C_{p-1} ont le même comportement aux points unis de l'involution. Il en résulte que les courbes D_0 qui ont des points multiples d'ordre p aux points unis de I, découpent sur les courbes C_1 et C_{p-1} des séries de même ordre et de même dimension. Par conséquent, les nombres des conditions pour que les courbes D_0 considérées contiennent une courbe C_1 ou une courbe C_{p-1} sont égaux. Les systèmes $|C_1|$ et $|C_{p-1}|$ ont donc la même dimension. Il en est de même de σ_1 et de σ_{p-1} et on a $r_1 = r_{p-1}$.

En partant de même des systèmes $|C_2|$ et $|C_{p-2}|$, $|C_3|$ et $|C_{p-3}|$, ..., on obtiendrait de même $r_2 = r_{p-2}$, $r_3 = r_{p-3}$, ..., $r_\nu = r_{\nu+1}$, où l'on a posé $p = 2\nu + 1$.

On peut prendre comme support de l'involution cyclique I une surface sur laquelle l'involution est engendrée par une homographie de période p *possédant* p *axes ponctuels, les points unis se trouvant sur l'un des axes et les autres axes ne rencontrant pas la surface et se distribuant en* $\frac{1}{2}$(p — 1) *couples d'espaces de même dimension.*

4. Les systèmes $|C_1| = |D_0 - C_{p-1}|$, $|C_{p-1}| = |D_0 - C_1|$ ont même dimension effective et par conséquent les nombres des points d'intersection (multiples de p) absorbés aux points unis sont égaux. On a donc

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + \cdots + i^2\alpha_i + \cdots + (p-2)^2\alpha_{p-2} + (p-1)^2\alpha_{p-1} = ph_1$$
$$(p-1)^2\alpha_1 + (p-2)^2\alpha_2 + \cdots + (p-i)^2\alpha_i + \cdots + 4\alpha_{p-2} + \alpha_{p-1} = ph_1$$

d'où par soustraction

$$(p-2)(\alpha_1 - \alpha_{p-1}) + (p-1)(\alpha_2 - \alpha_{p-2}) + \cdots + (p-2i)(\alpha_i - \alpha_{p-i}) + \cdots + \alpha_\nu - \alpha_{\nu+1} = 0$$

et

$$\sum_{1}^{2\nu}(p-2i)(\alpha_i-\alpha_{p-i})=0. \tag{1}$$

Le même raisonnement appliqué aux systèmes $|C_2|$, $|C_{p-2}|$ donne

$$\sum_{1}^{\nu}(p-2i)(\alpha_{2i}-\alpha_{p-2i})-\sum_{1}^{\nu}(2i-1)(\alpha_{2i-1}-\alpha_{p-2i+1})=0 \tag{2}$$

Supposons que dans la construction de la surface F, on ait utilisé la racine primitive $\eta=e^i$ de l'unité. A la racine η correspond le système $|C_i|$ et à la racine $\eta^{p-1}=\varepsilon^{p-i}$ correspond le système $|C_{p-i}|$. On peut appliquer le raisonnement précédent à ces deux systèmes et on obtiendra une relation linéaire et homogène des quantités $\alpha_1-\alpha_{p-1}, \alpha_2-\alpha_{p-2}, \ldots, \alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}$, les coefficients étant en valeur absolue les nombres 1, 3, 5, ..., $2\nu-1$. C'est d'ailleurs en supposant $i=2$ que nous avons formé l'équation (2).

Nous obtiendrons donc par ce procédé ν équations linéaires et homogènes du type précédent. Le déterminant des coefficients de $\alpha-\alpha_{p-1}, \alpha_2-\alpha_{p-2}, \ldots, \alpha_\nu-\alpha_{\nu+1}$ dans ces équations a comme éléments d'une colonne, ou d'une ligne, les ν premiers nombres impairs, pris avec le signe + ou le signe —. Deux éléments d'une même ligne ou d'une même colonne sont toujours distincts en valeur absolue. Un tel déterminant est différent de zéro et par conséquent on a

$$\alpha_1=\alpha_{p-1}, \alpha_2=\alpha_{p-2}, \cdots, \alpha_\nu=\alpha_{\nu+1}.$$

Les nombres des points unis de l'involution en lesquels les plans tangents à la surface F s'appuient sur des axes de l'homographie H de même dimension sont égaux.

5. Les gerbes d'hyperplans Σ_i, Σ_{p-i} ont, comme les axes conjugués σ_i, σ_{p-i}, même dimension. On peut établir entre ces gerbes une projectivité telle que si à l'hyperplan ξ de Σ_i correspond l'hyperplan ξ' de Σ_{p-i}, à ξ' correspond ξ. Nous représenterons cette correspondance par la notation

$$\begin{pmatrix}\Sigma_i & \Sigma_{p-i}\\ \Sigma'_{p-i} & \Sigma'_i\end{pmatrix}.$$

Cela étant, l'opération

$$K = \begin{pmatrix} \Sigma_0 & \Sigma'_0 & \Sigma_1 & \Sigma_{p-1} & \cdots & \Sigma_i & \Sigma_{p-i} & \cdots & \Sigma_\nu & \Sigma_{\nu+1} \\ \Sigma'_0 & \Sigma_0 & \Sigma'_{p-1} & \Sigma'_1 & \cdots & \Sigma'_{p-i} & \Sigma'_i & & \Sigma'_{\nu-1} & \Sigma'_\nu \end{pmatrix}$$

est une homographie biaxiale harmonique dont σ_0 est un des axes.

Il est facile de voir que les homographies H et K sont permutables (HK = KH). Mais la surface F n'est pas transformée en elle-même par K.

Supposons en effet qu'il en soit autrement. L'homographie K engendre sur F une involution J du second ordre ayant comme points unis les mêmes points unis que l'involution I. Soit P un point uni de la première catégorie. Une courbe C_1 passe simplement par P et K lui fait correspondre une courbe C_{p-1} passant $p-1$ fois par P. Or, les points unis d'une involution du second ordre sont des points unis de première espèce et à la courbe C_1, K devrait faire correspondre une courbe passant simplement par P et y touchant C_1. Nous parvenons donc à une absurdité.

L'homographie K fait correspondre à F une surface F′ sur laquelle l'homographie HK engendre une involution I′ analogue à I.

6. Désignons par $|L|$ le système canonique de F. Le système adjoint $|C'|$ à $|C|$ est formé de courbes d'ordre $2p(\pi-1)$ et les courbes L sont d'ordre $p[2(\pi-1)-n]$.

Les points de diramation de la surface Φ sont des points multiples d'ordre p à cône tangent rationnel. Chacun de ces points est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une courbe rationnelle de degré virtuel $-p$.

Considérons un point de diramation P′ de Φ et soit φ la courbe rationnelle à laquelle il est équivalent. Soient Γ les courbes découpées par les hyperplans passant par P′. On a

$$\Gamma_0 = \Gamma + \varphi$$

et les courbes Γ ont le degré $n' = n - p$ et le genre $\pi' = \pi - p + 1$. Une courbe canonique Λ de Φ, d'ordre $2(\pi-1)-n$, coupe Γ en $2(\pi'-1)-n'$ points. On en conclut que les courbes canoniques Λ coupent la courbe φ en $p-2$ points.

Les courbes canoniques Λ de Φ sont d'ordre $2(\pi-1)-$ n et ont des points multiples d'ordre p $-$ *2 aux points de diramation.*

Aux courbes Λ correspondent sur F des courbes canoniques L_0, d'ordre p[*2(π — 1) —* n] *passant* p — *2 fois par les points unis de l'involution.*

Rappelons que si p_a est le genre arithmétique de F et p'_a celui de Φ, on a

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) - \alpha(p^2 - 1).$$

D'autre part, si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de F et $p'^{(1)}$ celui de Φ, on a

$$p^{(1)} - 1 = p(p'^{(1)} - 1) + \alpha(p - 2)^2.$$

7. Considérons une courbe C_1. Elle passe une fois par les points P_1 de la première catégorie, deux fois par les points P_2 de la seconde catégorie, ..., i fois par les points P_i de la i-ième catégorie, ..., $p - 1$ fois par les points P_{p-1} de la dernière catégorie. Appelons P'_i les points qui correspondent sur la surface Φ aux points P_i. Les courbes Γ_1 qui correspondent sur Φ aux courbes C_1 passent une fois par les points P'_1, deux fois par les points P'_2, ..., i fois par les points P'_i, ..., $p - 1$ fois par les points P'_{p-1}.

Les adjointes C'_1 aux courbes C_1 sont des courbes d'ordre $2p(\pi - 1)$ ne passant pas par les points P_1, passant une fois par les points P_2, ..., $i - 1$ fois par les points P_i, ..., $p - 2$ fois par les points P_{p-1}.

D'autre part, les adjointes Γ'_1 aux courbes Γ_1 sont des courbes $\Gamma_1 + \Delta$, d'ordre $2(\pi - 1)$; elles passent $p - i$ fois par les points P'_1, p fois par les points P'_2, ..., $p - 2 + i$ fois par les points P'_i, ..., $2p - 3$ fois par les points P'_{p-1}. Il leur correspond sur F des courbes d'ordre $2p(\pi - 1)$ passant $p - 2 + i$ fois par les points P_i. Elles sont adjointes aux courbes C_1 et doivent coïncider avec les courbes C'_1 puisqu'elles ont le même ordre. Elles ne diffèrent des transformées des courbes Γ'_1 que par une courbe passant $p - 1$ fois par les points unis. Cette courbe doit donc appartenir à la gerbe Σ_0, mais alors les points unis sont multiples d'ordre p pour la courbe. On en conclut que la courbe n'existe pas. Les courbes C'_1, adjointes aux courbes C_1, forment un système linéaire appartenant à l'involution I.

En répétant ce raisonnement, on voit que les systèmes $|C'_1|$, $|C'_2|$, ..., $C'_{p-1}|$ respectivement adjoints aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartiennent à l'involution.

Au système $|\Gamma_0 + \Delta|$ adjoint à $|\Gamma_0|$ correspond sur F un système

$|C'_0| = |C_0 + L_0|$ adjoint à $|C_0|$. Il y a donc dans $|C'|$ p systèmes linéaires appartenant à l'involution.

Les systèmes

$$|C'_0 - C_0| = |L_0|, |C'_1 - C_0| = |L_1|, \cdots, |C'_{p-1} C_0| = |L_{p-1}|$$

qui appartiennent au système canonique $|L|$ de F sont également composés avec l'involution.

Le système canonique de F contient p *systèmes linéaires appartenant à l'involution.*

On peut observer que les nombres α_i et α_{p-i} étant égaux, les systèmes $|C'_i|$ et $|C'_{p-i}|$ sont des systèmes déduits de $|C'|$ en imposant les mêmes conditions aux courbes, donc leurs dimensions sont égales de même que les dimensions des systèmes $|L_i|$ et $|L_{p-i}|$.

8. Désignons par p_g le genre géométrique de F et par p'_g celui de Φ.

Les dimensions des systèmes $|L_1|, |L_2|, \ldots, |L_{p-1}|$ seront désignées par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{p-1}$.

Les courbes $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_{p-1}$ déterminent complètement le système canonique L de F et par conséquent, on a

$$p_g = p'_g + \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_{p-1} + \rho - 1.$$

Supposons que les surfaces F et Φ soient irrégulières et soient q, q' leurs irrégularités respectives. On sait que les systèmes adjoints à $|C|$ sur F et à $|\Gamma_0|$ sur Φ découpent respectivement sur une courbe C une série linéaire de défaut q et sur une courbe Γ_0 une série linéaire de défaut q' (théorème de Picard).

Les systèmes $|\Gamma'_1|, |\Gamma'_2|, \ldots, |\Gamma'_{p-1}|$ découpent sur une courbe Γ_0 des séries dont nous désignerons les défauts par $q'_1, q'_2, \ldots, q'_{p-1}$. Par la théorie des homographies, on a

$$q' + q'_1 + q'_2 + \cdots + q'_{p-1} = q + p - 1.$$

Liège, le 7 septembre 1968.