Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce

Lucien Godeaux

Résumé
Propriétés d'une variété algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier p n'ayant que des points unis de première espèce et de l'image de cette involution. Singularité des points de diramation et système canonique de cette image.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Propriétés d'une variété algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier p n'ayant que des points unis de première espèce et de l'image de cette involution. Singularité des points de diramation et système canonique de cette image.

Dans une note récente [1], nous avons étudié les involutions cycliques d'ordre premier p appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis de première espèce. Les résultats que nous avons obtenus peuvent s'étendre aux variétés algébriques à n dimensions et c'est l'objet de cette note.

Considérons une variété algébrique V à n dimensions contenant une involution cyclique d'ordre premier p n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Dans la gerbe des tangentes à V en un point uni A, la transformation T de V en soi génératrice de l'involution agit comme une homographie. Si celle-ci possède h axes de droites unies, nous dirons que le point A est d'espèce h. Le point A est uni de première espèce si $h = 1$, c'est-à-dire si l'homographie déterminée par T dans la gerbe de sommet A est l'identité.

Cette définition posée, nous supposerons que la variété V contient une involution cyclique d'ordre premier p ne possédant qu'un nombre

[1] *Recherches sur les surfaces algébriques contenant une involution cyclique* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1968, pp. 943-951).

fini de points unis de première espèce. Nous étudions les propriétés de cette variété et celles de la variété image Ω de l'involution. Nous commencerons par prendre pour modèle projectif de la variété V une variété normale d'un espace S_r à r dimensions sur laquelle l'involution est déterminée par une homographie de période p de S_r possédant p axes ponctuels, les points unis de l'involution appartenant à un seul de ces axes. Nous nous bornerons à indiquer ce point, renvoyant pour le détail à notre ouvrage sur les involutions (1). On déduit de ce modèle de V un modèle projectif normal de la variété image Ω.

Le premier point est de déterminer la singularité de Ω en un point de diramation. Nous déterminons la multiplicité de ce point et nous établissons que les sections hyperplanes du cône tangent sont des variétés représentant les variétés d'ordre p formant un système linéaire sans point-base dans un espace linéaire à $n - 1$ dimensions. Nous appelons ces variétés des variétés de Veronese généralisées (2).

La variété V contient p systèmes linéaires partiels de sections hyperplanes appartenant à l'involution, découpés par les hyperplans des axes tangentiels de l'homographie génératrice de l'involution. En dehors de celui de ces systèmes qui correspond aux sections hyperplanes de Ω, les autres se partagent par couples ayant la même dimension. Nous déterminons ensuite la multiplicité des points de diramation pour les variétés canoniques de Ω.

Nous terminons en introduisant une homographie biaxiale harmonique associée à la variété V.

1. Soit V une variété algébrique à n dimensions contenant une involution cyclique I d'ordre premier p ne possédant qu'un nombre fini de points unis de première espèce. Désignons par T la transformation birationnelle de V en soi génératrice de l'involution I.

On sait que l'on peut construire sur V un système linéaire $|F|$ de variétés à $n - 1$ dimensions, transformé en lui-même par T et tel que:

---

(1) On trouvera, dans notre ouvrage *Théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et applications* (Rome, Cremonese, 1963) le raisonnement fait pour le cas des surfaces et des variétés à trois dimensions. L'extension au cas des variétés à n dimensions est immédiate.

(2) Cette dénomination nous parait justifiée, la surface de Veronese étant obtenue en faisant $n = 3$ et $p = 2$.

a) sa dimension r est aussi grande qu'on le veut et il est simple.

b) il contient p systèmes linéaires appartenant à l'involution I,

c) l'un de ces systèmes est dépourvu de point-base.

Rapportons projectivement les variétés F aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. Il correspond à V une variété que nous désignerons encore par V sur laquelle la transformation T est déterminée par une homographie H, de période p, possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$, les points unis de l'involution appartenant à un seul de ces axes, par exemple à σ_0.

Désignons par Σ_i la gerbe des hyperplans passant par les axes de H sauf par σ_i. Soient $| F_0 |, | F_1 |, \ldots, | F_{p-1} |$ les sections de la variété V par les hyperplans de $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{p-1}$, $r_0, r_1, \ldots, r_{p-1}$ étant leurs dimensions. On a d'ailleurs

$$r_0 + r_1 + \ldots + r_{p-1} + p = r + 1.$$

On peut prendre r suffisamment élevé pour que r_0 soit aussi grand qu'on le veut. Rapportons projectivement les variétés F_0 aux hyperplans d'un espace S' à r_0 dimensions. A la variété V correspond une Ω image de l'involution I. Si m est l'ordre de Ω, V a l'ordre pm.

Nous désignerons par $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{p-1}$ les variétés à $n-1$ dimensions qui correspondent sur Ω aux variétés $F_0, F_1, \ldots, F_{p-1}$. Ces variétés forment des systèmes linéaires complets et $| \Phi_0 |$ est le système des sections hyperplanes de Ω, qui est donc une variété normale.

2. Soit A un point uni de l'involution. Puisqu'il est uni de première espèce, les points de V qui lui sont infiniment voisins sont unis pour H et les tangentes à V en A sont unies pour cette homographie. Il en résulte que l'espace α à n dimensions tangent à V en A s'appuie suivant un espace α' à $n-1$ dimensions sur un des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$.

L'intersection de $n-2$ hyperplans linéairemant indépendants de Σ_0 passant par A avec V est une surface sur laquelle H détermine une involution dont A est un point uni de première espèce. On sait que les autres hyperplans de Σ_0 passant par A coupent cette surface suivant des courbes ayant un point multiple d'ordre p en A. On en déduit que la variété à trois dimensions intersection de $n-3$ hyperplans de Σ_0 passant par A est coupée par les autres hyperplans de

Σ_0 passant par A suivant des surfaces ayant un point multiple d'ordre p en A. Et ainsi de suite. Une variété F_0 passant par A a la multiplicité p en A.

Un hyperplan de Σ_0 passant par un point uni A de l'involution I coupe V suivant une surface F_0 *ayant la multiplicité* p *en ce point.*

Désignons par A′ le point de diramation qui correspond sur Ω au point uni A.

Les cônes d'ordre p tangents aux différentes surfaces F_0 passant par A coupent l'espace α' suivant des variétés algébriques à $n - 2$ dimensions d'ordre p, formant un système linéaire sans point-base. Aux hyperplans de Σ_0 passant par A correspondent projectivement les hyperplans de S′ passant par A′, et aux cônes tangents aux surfaces F_0 en A correspondent des cônes tangents à Ω en A′. On en conclut que les sections hyperplanes du cône tangent en A′ à Ω sont les variétés de Veronese généralisées représentant les variétés d'ordre p de l'espace à $n - 1$ dimensions α'. Le cône est donc d'ordre p^{n-1} et telle est la multiplité de P′ pour Ω.

Un point de diramation de la variété Ω est multiple d'ordre p^{n-1} *pour cette variété et les sections hyperplanes du cône tangent sont des variétés de Veronese généralisées représentant les variétés d'ordre* p *d'un espace à* n — *1 dimensions.*

On peut observer que si r et par suite r_0 sont suffisamment grands, ce qu'on peut toujours supposer, les sections hyperplans du cône tangent sont des variétés de Veronese généralisées normales.

3. Aux axes $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ de l'homographie H on peut attacher des nombres $\varepsilon^0 = 1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{p-1}$, où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité. On peut d'ailleurs modifier l'ordre des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ en changeant la racine de l'unité choisie.

Les espaces S_n, tangents à V aux points unis de l'involution I rencontrent chacun un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ suivant des espaces à $n - 1$ dimensions. Nous supposerons que l'involution I possède a_1 points unis dont les espaces tangents α_1 rencontrent σ_1 suivant des espaces α'_1, a_2 points unis dont les espaces tangents α_2 rencontrent σ_2 suivant des espaces $\alpha'_2, \ldots, a_{p-1}$ points unis dont les espaces tangents α_{p-1} rencontrent σ_{p-1} suivant des espaces α'_{p-1} à $n-1$ dimensions. Nous dirons que ces points appartiennent respectivement à la première, deuxième, ..., $(p-1)$ -ième catégorie.

Le système $| G | = | 2F |$ ccontient p systèmes appartenant à l'involution I. L'un d'eux, qui contient les variétés $2F_0$, est dépourvu de points-base. Nous le désignerons par $| G_0 |$.

Les autres systèmes peuvent être représentés par

$$| G_1 | = | F_0 + F_1 |, | G_2 | = | F_0 + F_2 |, \ldots, | G_{p-1} | = | F_0 + F_{p-1} |.$$

A ces systèmes sont attachés respectivement les nombres ε, ε^2, ..., ε^{p-1} et au système $| G_0 |$ le nombre $\varepsilon^0 = 1$.

Il est clair qu'une variété $F_i + F_k$ appartient au système attaché au nombre ε^{i+k}.

4. Considérons le point uni A_1. Les hyperplans de Σ_1 contiennent ce point et coupent l'espace α_1 tangent suivant un espace à n-1 dimensions. La variété F_1 située dans cet hyperplan passe simplement par A_1.

Les variétés $2F_1$ passent doublement par A_1 et à ces variétés est attaché le nombre ε^2. Ces variétés appartiennent donc au système $| G_2 |$. Les variétés $F_0 + F_2$ passent donc doublement par A_1, or les variétés F_0 ne passent pas en général par ce point, donc les variétés F_2 passent deux fois par A_1.

Les variétés $F_1 + F_2$, auxquelles est attaché le nombre ε^3, passent trois fois par A_1 et appartiennent au système $| G_3 | = | F_0 + F_3 |$. On en conclut que les variétés F_3 passent trois fois par A_1.

Et ainsi de suite. Les variétés F_1, F_2, ..., F_{p-1} passent respectivement une fois, deux fois, ..., $p-1$ fois par le point uni A_1.

Le même raisonnement montre que *les variétés* F_1, F_2, ..., F_{p-1} *passent avec des multiplicités distinctes, comprises entre* 0 *et* p *(*limites *exclues) par chaque point uni de l'involution.*

Observons que deux variétés F_i, F_k ne peuvent avoir la même multiplité au point A_1 ni par suite en un point uni quelconque.

Un hyperplan de Σ_1 coupe l'espace α'_1 relatif à A_1 suivant un espace à $n-2$ dimensions et le cône tangent à une variété F_0 passant par A_1 en ce point suivant un cône d'ordre p. On en conclut que les variétés Φ_1 ont en A'_1 un point multiple d'ordre p^{n-2}, les sections hyperplanes du cône tangent étant des variétés de Veronese représentant les variétés d'ordre p d'un espace à $n-2$ dimensions.

Les variétés Φ_1, Φ_2, ..., Φ_{p-1} ont en un point de diramation le multiplicité p^{n-2}, *les cônes tangents ayant comme sections hyperplanes des variétés de Veronese généralisées.*

5. Considérons les variétés F_1 et F_{p-1}. Aux variétés $F_1 + F_{p-1}$ est attaché le nombre $\varepsilon.\varepsilon^{p-1} = 1$, donc ces variétés appartiennent au système $| G_0 |$. Les variétés G_0 ne passent pas en général par les points unis de l'involution, tandis que les variétés $F_1 + F_{p-1}$ passent par ces points. Une variété G_0 passant par les points unis acquiert des points multiples d'ordre p en ces points. On en conclut que la somme des multiplicités des variétés F_1, F_{p-1} en un point uni est égale à p.

Pour, en partant du système $| G_0 |$, obtenir le système $| F_1 + F_0 |$, il faut exprimer que les courbes du système passent par les points unis avec certaines multiplidités. Mais pour obtenir le système $| F_{p-1} + F_0 |$, il faut faire les mêmes opérations, l'ordre des points multiples ayant changé. On en conclut que les systèmes $| G_0 + G_1 |$ et $| G_0 + G_{p-1} |$ ont la même dimension et qu'il en est par suite de même des systèmes $| F_1 |$ et $| F_{p-1} |$.

On arrive à la même conclusion en considérant les systèmes $| F_k |$ et $| F_{p-k} |$.

Les espaces σ_k et σ_{p-k} ont la même dimension.

6. Examinons maintenant le système canonique de Ω.

Supposons $n = 2$. Les variétés V et Ω sont des surfaces. Sur la surface V, l'homographie H engendre un involution I n'ayant que des points unis de première espèce et aux points de diramation correspondants, la surface Ω a des points multiples d'ordre p à cônes tangents rationnels. Aux courbes canoniques de Ω correspondent sur la surface V des courbes canoniques ayant la multiplicité $p - 2$ aux points unis.

Supposons n = 3. Considérons sur V les surfaces F_0 découpées par les hyperplans de Σ_0. Sur une de ces surfaces, aux courbes canoniques Γ de la surface Φ_0 homologue correspondent des courbes canoniques C passant $p - 2$ fois par les points unis de I. Aux surfaces de Ω adjointes aux surfaces Φ_0 correspondent sur V des surfaces F'_0 adjointes aux surfaces F_0 et découpant sur la surface F_0 envisagée, les courbes C. Aux surfaces canoniques de Ω correspondent sur V les surfaces F'_0-F_0. Si m est l'ordre des surfaces F'_0, les surfaces précédente sont l'ordre $m-1$ et se comportent comme les surfaces F'_0. Il en résulte que les transformées des surfaces canoniques de Ω passent $p-2$ fois par les points unis de I..

Ce raisonnement peut se répéter de proche en proche et on voit que sur une variété F_0 aux variétés canoniques de la variété Φ_0 homologue correspondent des variétés canoniques passant $p-2$ fois par les points unis de l'involution. Enfin, au système canonique de Ω correspond un système de variétés canoniques de V passant $p-2$ fois par les points unis de I.

En un point uni A, les différentes variétés canoniques de V transformées des variétés canoniques de Ω ont des cônes tangents d'ordre $p-2$ qui coupent l'espace α' correspondant suivant des variétés d'ordre $p-2$. En raisonnant comme plus haut, on voit que les variétés canoniques de Ω ont la multiplicité $(p-2)^{n-1}$ en chaque point de diramation. Les sections hyperplanes du cône tangent sont des variétés de Veronese représentant les variétés d'ordre $p-2$ d'un espace à $n-1$ dimensions.

Les variétés canoniques de Ω passent $(p-2)^{n-1}$ *fois par les points de diramation et il leur correspond, sur la variété V, des variétés canoniques ayant la multiplicité* $p-2$ *aux points unis.*

7. A la variété V on peut associer, lorsque $p \geqslant 3$, une homographie biaxiale harmonique de la manière suivante :

Dans S_r, une homographie est complètement déterminée lorsque l'on se donne $r+1$ couples de points homologues indépendants. Nous déterminerons une homographie K par les conditions suivantes:

a) Les points de σ_0 sont tous unis pour K.

b) Si P et P′ sont deux points quelconques pris l'un dans σ_i, l'autre dans σ_{p-i}, K fait correspondre P′ à P et P à P′, pour toutes les valeurs de i.

Cette homographie est évidemment harmonique. De plus, elle est permutable avec H car quand on effectue H, les conditions qui déterminent K sont inaltérées.

Supposons que la variété V soit transformée en elle-même par K. Un hyperplan de Σ_1 est transformé par K en un hyperplan de Σ_{p-1}, donc une variété F_1 en une variété F_{p-1}. Or, la variété F_1 passe simplement par un point uni A_1 de la première catégorie alors que la variété F_{p-1} passe $p - 1$ fois par ce point qui est uni pour K. Nous arrivons ainsi à une absurdité sauf si $p = 2$, mais la construction de K exige que l'on ait $p > 2$. La variété V ne peut donc être transformée en elle-même par K.

L'homographie K fait correspondre à la variété V une variété V' transformée en soi par l'homographie H et possédant une involution d'ordre p ayant les mêmes points unis que I.

Liège, le 12 octobre 1968.

ERRATUM: Page 490, ligne 9, lire $F_{1,0}(Y,Z) + F_{0,1}(Y,Z) = 0$

au lieu de $F_{1,0}(y,z) + F_{0,1}(Y,Z) = 0$.