Matematica. — *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un.* Nota di LUCIEN GODEAUX, presentata dal Corrispondente F. ENRIQUES.

Lorsque M. Enriques introduisit, dans la théorie des surfaces algébriques, la notion de plurigenre, il remarqua que la surface du sixième ordre, passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre, avait les genres arithmétique et géométrique nuls ($p_a = p_g = 0$), mais le bigenre égal à l'unité ($P_2 = 1$) (1). Plus tard, M. Enriques démontra que toute surface algébrique régulière, dépourvue de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro, peut se ramener, par une transformation birationnelle, à cette surface du sixième ordre (2). M. Enriques fit, de plus, une étude très

(1) F. Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (Chap. VI, n. 39), Memorie della Soc. ital. delle Scienze (dei XL), 1896, ser. 3ª, tom. X. On sait que M. Castelnuovo a, vers la même époque, démontré que les conditions de rationnalité d'une surface sont $p_a = P_2 = 0$.

(2) F. Enriques, *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno*, idem., 1906, ser. 3ª, tom. XIV. Au sujet des surfaces de genres zéro et de bigenre un, voir aussi: G. Fano, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno, e loro casi particolari*, Rendiconti

complète de cette surface, et démontra qu'elle est caractérisée soit par les conditions $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$, soit par les conditions équivalentes $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$.

Dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* ([1]), MM. Enriques et Severi ont remarqué qu'il pouvait exister, sur une surface de genres un $(p_a = P_4 = 1)$, des involutions d'ordre deux, dépourvues de points unis, représentables sur des surfaces de genres zéro et de bigenre un. Ensuite, M. Enriques a fait voir qu'inversement une surface de genres zéro et de bigenre un peut toujours être considérée comme représentant une involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un ([2]).

En d'autres termes, si l'on considère la surface Φ, d'ordre six, passant doublement par les arêtes du tétraèdre dont les faces sont

$$x = 0 \;,\; y = 0 \;,\; z = 0 \;,\; v \equiv ay + by + cz + d = 0 \,,$$

cette surface a pour équation ([3])

$$\varphi_2(xyz \,,\, yzv \,,\, zvx \,,\, vxy) + xyzv\, f_2(x \,,\, y \,,\, z \,,\, v) = 0 \,, \tag{1}$$

φ_2 et f_2 étant des polynômes du deuxième degré, et la surface F, représentée par les équations (1) et

$$u^2 = xyzv \,,$$

est une surface de genres un $(p_a = P_4 = 1)$. De plus, M. Enriques a montré que cette surface F, de genres un, peut se ramener (par une transformation birationnelle) à une quadrique double Q.

Il existe donc, sur la surface F, deux involutions d'ordre deux, l'une représentable sur Φ, l'autre sur Q. Chacune de ces involutions détermine une transformation birationnelle de F en elle-même. Je me propose de démontrer, dans cette Note, que les deux transformations ainsi définies sont permutables, et que leur produit engendre une involution d'ordre deux et de genres un $(p_a = P_4 = 1)$.

En joignant ces résultats à ceux de M. Enriques, on pourra donc énoncer le théorème suivant:

---

del Circ. Matem. di Palermo, 1910, tom. XXIX; L. Godeaux. *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, Bulletin de la Société Mathématique de France, 1913, tom. XLI; *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, Bulletin de l'Académie roumaine, 1913, tom. II.

([1]) Acta Mathematica, vol. XXXII, XXXIII (XXXII, n. 38).

([2]) Enriques, *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere 1*, Rend della R. Accad. di Bologna, 13 genn. 1908.

([3]) Enriques, *Introduzione...*, loc. cit. (note au n. 39).

Toute surface algébrique Φ, de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). *représente une involution d'ordre deux, dépourvue de points unis, appartenant a une surface* F *de genres un* ($p_a = p_4 = 1$). *Cette surface* F *possède trois transformations birationnelles involutives permutables en elle-même:*

La première engendre l'involution de genres zéro et de bigenre un représentée par Φ.

La deuxième engendre une involution rationnelle qui permet de représenter F *sur une quadrique double* (*ayant une courbe de diramation d'ordre huit*).

La troisième engendre une involution de genres un ($p_a = P_3 = 1$).

1. Soit Φ la surface algébrique de genres zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$), représentée par l'équation

$$(1) \qquad \varphi_2(xyz\,, yzv\,, zvx\,, vxy) + xyzv\, f_2(x\,, y\,, z\,, v) = 0\,,$$

dans laquelle φ_2 et f_2 désignent des polynômes du deuxième degré et v une fonction linéaire $ax + by + cz + d$. La surface Φ passe doublement par les arêtes du tétraèdre dont les faces sont

$$x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0\,,\ v \equiv ax + by + cz + d = 0\,.$$

De plus, c'est *une surface générale de sa classe* (Enriques).

Considérons la surface F représentée par les équations (1) et

$$u^2 = xyzv\,.$$

Elle est de genres un ($p_a = P_4 = 1$), et la transformation T_1, d'équations

$$x' = x\,,\ y' = y\,,\ z' = z\,,\ u' = -u\,,$$

engendre, sur F, une involution d'ordre deux, dépourvue de points unis, représentable sur Φ (Enriques).

Considérons, sur la surface Φ, un système complet $|\Gamma|$, de genre $\pi > 1$, et son adjoint $|\Gamma'|$. Ces systèmes ont le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi - 1$. En général, ils sont dépourvus de points-base. Si $|\Gamma|$ a des points-base, ils sont au nombre de deux et les courbes Γ sont hyperelliptiques. Il est aisé de voir que les Γ' sont également hyperelliptiques et que $|\Gamma'|$ a, par suite, deux points-base [1].

Désignons par $\overline{C}$, $\overline{C}'$ les courbes de F qui correspondent respectivement aux courbes Γ, Γ'. Soit $|C|$ le système complet contenant les courbes $\overline{C}$. Le système $|C|$ a le degré $4\pi - 4$, le genre et la dimension $2\pi - 1$,

[1] Enriques, *Sopra le superficie..*, loc. cit. (n. 7).

Entre une courbe Γ et une courbe $\overline{C}$, nous avons une correspondance (1, 2) dépourvue de points de diramation. Par suite, un groupe canonique de Γ a pour correspondant un groupe canonique de $\overline{C}$. Or, les Γ' découpent, par définition, des groupes canoniques sur les Γ; les courbes correspondantes $\overline{C}'$ découpent donc des groupes canoniques sur les courbes $\overline{C}$. Or, les courbes C découpent également des groupes canoniques sur les $\overline{C}$. Par suite, le système $|C|$ comprend les courbes $\overline{C}'$.

Les courbes de F *qui correspondent à des courbes de genre supérieur à l'unité, de* Φ *et à leurs adjointes, sont équivalentes.*

2. Supposons actuellement que $|\Gamma|$ soit un faisceau de genre deux ($\pi = 2$). De pareils faisceaux existent certainement sur Φ; l'un d'eux est, par exemple, découpé sur la surface (1) par les plans $\lambda x + \mu y = 0$.

Les courbes Γ' sont également de genre deux et forment un faisceau. Les faisceaux $|\Gamma|, |\Gamma'|$ ont, de plus, chacun, deux points-base.

Le système $|C|$ a maintenant le degré quatre, le genre et la dimension trois.

On sait qu'une courbe de genre trois possédant une involution (∞^1) d'ordre et de genre deux, est hyperelliptique ([1]). Les courbes $\overline{C}$ et $\overline{C}'$ sont dans ce cas. Sur chaque courbe $\overline{C}$ se trouve donc une g_2^1, et les ∞^2 groupes de ces ∞^1 g_2^1 forment une involution I_2 sur F. Mais les courbes C découpant sur les $\overline{C}$ des groupes canoniques, chacune d'elles contient ∞^1 groupes de I_2 et, par conséquent, $|C|$ est composé avec I_2. Rapportons projectivement les courbes C aux plans d'un S_3; F se transforme en une quadrique double Q qui a, nécessairement, une courbe de diramation d'ordre huit ([2]). Il en résulte que toutes les courbes C sont hyperelliptiques et que les groupes de I_2 situés sur une courbe $\overline{C}'$, y forment la g_2^1 dont nous avons reconnu l'existence plus haut (une courbe de genre trois ne peut en effet contenir plus d'une g_2^1).

Nous désignerons par T_2 la trasformation birationnelle involutive de F engendrant I_2.

3. Sur une courbe C, hyperelliptique, de genre trois, T_1 change un groupe de la g_2^1 en un groupe de cette série. À deux groupes de la g_2^1 conjugués par rapport à T_1, correspondent deux points de Q, c'est-à-dire qu'à T_1 correspond une transformation birationnelle Θ de Q en elle-même. De plus, T_1 étant involutive, il en est de même de Θ.

D'autre part, à deux points de F conjugués par rapport à la transformation $T_3 = T_1 T_2$, correspondent deux points de Q conjugués par rapport à Θ. On en conclut que T_3 est involutive, c'est-à-dire que T_1, T_2 sont per-

([1]) Voir par exemple: R. Torelli, *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti a una curva algebrica*, Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 1914, tom. XXXVII (n. 32, note 33).

([2]) Enriques, *Sui piani doppî di genere uno*, Memorie della Soc. ital. delle Scienze (dei XL), ser. 3ª, tom. X, 1896.

mutables $(T_1 T_2 = T_3 T_1)$. On sait d'ailleurs que T_3 engendre, sur les courbes $\overline{C}$ ou $\overline{C}'$, des γ'_2 elliptiques (¹).

Dans le système $|C|$, il y a deux faisceaux $|\overline{C}|, |\overline{C}'|$, dont les courbes sont invariantes pour T_1 e T_3, et aucune courbe C n'appartenant pas à ces faisceaux ne jouit de cette propriété. Par conséquent, la transformation Θ laisse invariantes des sections planes de Q appartenant à deux faisceaux. En d'autres termes, Θ est une homographie involutive bi-axiale.

Les axes de Θ ne sont pas des génératrices de Q, car les courbes $\overline{C}, \overline{C}'$ sont des courbes de genre trois et non des courbes elliptiques. Par suite, Θ laisse invariants quatre points de Q. Il y aura donc, ces quatre points n'étant pas en général sur la courbe de diramation de Q, huit points de F invariants pour une des transformations T_1, T_3. Or, par construction, T_1 ne laisse aucun point de F invariant : donc T_3 engendre une involution d'ordre deux possédant huit points unis ; et cette involution est, par conséquent, de genres un $(p_a = P_4 = 1)$ (²).

(¹) Torelli, loc. cit.

(²) L. Godeaux, *Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un*, Bull. Acad. roy. de Belgiquè, 1913 ; *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un*, Annales de l'École Normale (en cours de publication).