RECHERCHES DES INVOLUTIONS DE GENRES ZÉRO, BIGENRE UN, APPARTENANT A UNE SURFACE DE GENRES UN

PAR

LUCIEN GODEAUX

à Liége (Belgique)

Dans des travaux publiés ces dernières années, nous avons entrepris l'étude des involutions doublement infinies, douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant aux surfaces algébriques [1]. Nous nous sommes surtout attaché aux cas où les surfaces envisagées ont des courbes canoniques ou pluricanoniques d'ordre zéro ($P_{12} = 1$). C'est ainsi que nous avons étudié les involutions de genres un appartenant à une

---

[1] Voici la liste de nos travaux sur ce sujet:

I. *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébriques.* (Rend. R. Accad. Lincei, 1° sem., 1914.)

II. *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1914, (3) v.)

III. *Mémoire sur les involutions de genres un, appartenant à une surface de genres un* (première partie). (Annales de l'École Normale Supérieure, 1914.) La seconde partie de ce travail est en préparation.

IV. *Sur les involutions de seconde espèce, appartenant à une surface de genres un.* (Annales de l'Université de Jassy, 1915.)

V. *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. (Bull. Soc. Math. de France, 1913.)

VI. *Mémoire sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un.* (Bull. Soc. Math. de France, 1915.)

VII. *Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité.* (Bull. des Sc. Math., 1915.)

Nous ajouterons à cette liste deux Mémoires publiés antérieurement l'un par MM. ENRIQUES et SEVERI (Acta Matematica, 1909), l'autre par MM. BAGNERA et DE FRANCHIS (Mem. Soc. Ital. delle Sc., detta dei XL, 1908) et qui ont trait tous deux aux involutions de genre $P_{12} = 1$ appartenant à une surface hyperelliptique ($p_a = -1$, $P_4 = p_g = 1$).

surface de genres un et les involutions de genres zéro et de bigenre un appartenant à une surface de mêmes genres. Pour être complet, il était nécessaire d'étudier les involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un. C'est cette lacune que nous comblerons ici. Nous établirons que:

Les involutions de genres zéro, bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) *appartenant à une surface de genres un* ($p_a = P_4 = 1$) *sont d'ordres 2, 4, 6, 8 ou 16.*

Les tableaux placés à la fin de ce travail résument nos recherches sur les involutions de genre $P_{12} = 1$ appartenant aux surfaces de genre $P_{12} = 1$.

Nous supposons connus, dans les cours de ce travail, les raisonnements par lesquels on établit les singularités des points de diramation des surfaces images des involutions envisagées ici, ainsi que ces singularités. On trouvera tous les renseignements nécessaires dans nos précédents travaux [1].

Rappelons, avant de commencer, ce que nous désignons par involutions de première et de seconde espèce. Une involution étant engendrée par plusieurs transformations birationnelles de la surface F à laquelle elle appartient (on verra que toutes les involutions considérées ici ont cette propriété), ou dira qu'elle est de première espèce s'il existe sur F des points invariants pour deux au moins des transformations qui ne soient pas puissances l'une de l'autre, quelles que soient ces transformations. Elle sera dite de seconde espèce dans le cas opposé.

A la fin de ce travail, nous indiquons des compléments à deux travaux antérieurs sur le même sujet.

1. Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possèdant une involution I_n, d'ordre n et de genres zéro, bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$). Soit Φ une surface image de l'involution I_n. On sait que la transformée sur F de la courbe bicanonique de Φ, augmentée de deux fois la courbe de coïncidence de I_n, donne une courbe bicanonique de F. Or, les courbes bicanoniques de F et de Φ sont d'ordre zéro, donc la courbe de coïncidence de I_n est d'ordre zéro. En d'autres termes, l'involution I_n ne possède qu'un nombre fini, éventuellement nul, de points de coïncidence.

Nous avons démontré qu'une involution appartenant à une

(1) Particulièrement dans notre Mémoire des Annales de l'École Normale.

surface algébrique, ne possédant qu'un nombre fini de points de coïncidence, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même (1). Il en résulte que l'involution I_n est engendrée par un groupe g, d'ordre n, de transformations birationnelles $T_1 = 1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ de la surface F en elle-même.

Une involution de genres zéro et de bigenre un, appartenant à une surface de genres un, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de cette surface en elle-même.

2. Nous aurons à considérer, sur F, certains systèmes linéaires invariants pour les transformations du groupe g. Ces systèmes seront construits de la manière suivante:

Considérons, sur Φ, un système $|\Gamma|$, de genre $\pi > 3$, de degré $2\pi - 2$, de dimension $\pi - 1$ (donc complet), simple et dépourvu de points-base (donc les Γ ne sont pas hyperelliptiques). Aux courbes Γ correspondent, sur F, des courbes C, de degré $n(2\pi - 2)$, de genre $n(\pi - 1) + 1$, appartenant totalement à un système complet de dimension $n(\pi - 1) + 1$. Le système complet $|C|$ est transformé en lui-même par les transformations du groupe g. Soit en effet $\overline{C}$ une courbe de $|C|$ non transformée d'une courbe Γ et soit C' une transformée d'une courbe Γ. Une transformation quelconque de g change le faisceau linéaire déterminé dans $|C|$ par $\overline{C}$ et C' en un faisceau linéaire comprenant encore C' et par suite compris dans $|C|$.

D'une façon générale, nous supposerons que le système $|\Gamma|$ est le système des sections hyperplanes de Φ, ce qui revient à supposer cette surface normale et simple.

3. *Involutions d'ordre premier.* — Considérons une involution I_n d'ordre premier n et soient P un point de coïncidence (supposé existant) de I_n, P' le point de diramation correspondant sur Φ.

En suivant pas-à-pas le raisonnement fait dans notre *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un* (2), on démontre que la surface normale Φ possède, en P', un point double abaissant la classe de la surface de n unités. De plus, les courbes C, transformées des courbes Γ et passant par P, ont en ce point un point double ordinaire.

---

(1) L. Godeaux, *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* (Rend. R. Accad. Lincei, 1er sem., 1914.)

(2) *Loc. cit.*, chap. III.

Considérons un faisceau de courbes Γ et appelons S la classe effective de Φ. L'invariant de Zeuthen-Segre $I = 8$ de Φ est égal à

$$8 = S + nx - 3(2\pi - 2) - 4,$$

x étant le nombre des points de coïncidence de I_n.

L'invariant de Zeuthen-Segre $I = 20$ de F, calculé à l'aide du faisceau de $|C|$ transformé du faisceau de $|\Gamma|$ considéré, donne

$$20 = nS + x - 3n(2\pi - 2) - 4.$$

De ces deux formules, on déduit

$$(n^2 - 1)x = 12(n - 2).$$

On a donc, nécessairement, $n = 2$, $x = 0$.

Une involution d'ordre premier et de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un, est nécessairement d'ordre 2 *et est dépourvue de point de coïncidence.*

Notons, ce qui nous sera utile dans la suite, que M. Enriques a montré qu'inversement: [1]

Une surface de genres zéro, bigenre un, est toujours l'image d'une involution d'ordre deux, appartenant à une surface de genres un.

4. *Théorème sur la composition des involutions.* — Nous allons former une suite de surfaces.

$$(1) \qquad \Phi_0 \equiv F, \quad \Phi_1, \quad \ldots, \quad \Phi_k, \quad \ldots, \Phi_\varepsilon \equiv \Phi,$$

ε étant le nombre des facteurs premiers de n, telle que l'on passe d'une surface Φ_k à la précédente Φ_{k-1} par une transformation rationnelle dans un seul sens $(1, n_k)$, d'ordre premier n_k. Nons montrerons que l'on peut toujours construire cette suite de telle manière que les surfaces $\Phi_1, \ldots, \Phi_{\varepsilon-1}$ soient de genres un.

Considérons, dans le groupe g, une transformation de période première n_1, et soit Φ_1 une surface image de l'involution d'ordre n_1 engendrée par cette transformation. L'involution I_n

[1] F. Enriques, *Un'osservazzione relativa alle superficie di bigenere uno* (Rend. R. Accad. di Bologna. 13 genn. 1908.)

étant composée avec l'involution d'ordre n_1 dont il vient d'être question, il lui correspond, sur Φ_1, une involution d'ordre $\frac{n}{n_1}$. En opérant sur cette involution comme on a opéré sur I_n, et ainsi de suite, on arrivera à une suite de surfaces $\Phi_0 \equiv F$, Φ_1, $\ldots$, Φ_k, $\ldots$, $\Phi_\varepsilon \equiv \Phi$ telle que l'on passe de l'une à la précédente par une transformation rationnelle d'ordre premier.

Soit Φ_k $(k < \varepsilon)$ la première surface de la suite qui soit de genres zéro et de bigenre un. Sur la surface de genres un, Φ_{k-1}, il existe une involution I'' d'ordre premier n_k nécessairement égal à 2, dont Φ_k est l'image, et une involution I' dont Φ est l'image. Cette dernière involution est évidemment composée avec I'' et son ordre est donc pair; nous indiquerons cet ordre par 2ν.

L'involution I' est engendrée par un groupe g' de transformations birationnelles de Φ_{k-1} en elle-même et ce groupe comprend une transformation θ'' d'ordre 2 engendrant I''. Considérons une transformation de g', d'ordre premier ν', différente de θ''. Cette transformation engendre une involution I''', d'ordre ν', possèdant un certain nombre x' de points de coïncidence, et dont nous indiquerons par Φ'_k une image. A l'involution I''' correspond, sur Φ_k, une involution d'ordre ν', possèdant $\frac{1}{2}x'$ points de coïncidence, qui est évidemment de genres zéro et de bigenre un. Il résulte de nos recherches que $\frac{1}{2}x'$ n'est pas nul (¹) et que, par suite, la surface Φ'_k est de genres un (²).

Dans la construction de la suite (1), nous eussions pu prendre, au lieu de Φ_k, la surface Φ'_k et la suite, continuée par des surfaces Φ'_{k+1}, $\ldots$, $\Phi'_{\varepsilon-1}$, Φ_ε eût contenu au moins une surface de genres un de plus. On en conclut que l'on peut construire la suite (1) de manière que les surfaces Φ_1, $\ldots$, $\Phi_{\varepsilon-1}$ soient de genres un. Cela revient à dire que l'involution I_n est composée au moyen d'une involution d'ordre $\frac{1}{2}n$ et de genres un.

Nous savons qu'une involution de genres un appartenant à une surface de genres un est d'ordre $2^\alpha 3^\beta$ $(\alpha \leq 4,\ \beta \leq 2)$ (³); par conséquent, on a $n = 2^{\alpha+1} 3^\beta$.

Les involutions de genres zéro et de bigenre un, appartenant à

(¹) Voir notre *Mémoire* du Bull. de la Soc. Math de France, *loc. cit.*
(²) Voir notre *Mémoire* des Annales de l'Ecole Normale, *loc. cit.*
(³) Voir notre *Mémoire* des Annales de l'Ecole Normale, *loc. cit.*

une surface de genres un, sont d'ordre $2^{\alpha+1}3^\beta$ et sont composées au moyen d'involutions de genres un et d'ordre $2^\alpha 3^\beta$.

5. *Existence d'une deuxième involution sur la surface* F. — La surface de genres un $\Phi_{\varepsilon-1}$ contenant une involution d'ordre deux et de genres zéro, bigenre un, possède nécessairement en outre une seconde involution d'ordre deux également, mais de genres un (1). Désignons par Ψ une surface de genres un image de cette involution. A un point de Ψ correspondent $2^{\alpha+1}3^\beta$ points de F et les ∞^2 groupes de $2^{\alpha+1}3^\beta$ points ainsi obtenus forment une involution dont toutes les propriétés sont connues (2).

Si une surface de genres un contient une involution de genres zéro et de bigenre un, elle en contient une de genres un et de même ordre.

Nous désignerons par I_n l'involution de genres zéro et de bigenre un, par I'_n celle de genres un, existant sur F, par g, g' respectivement les groupes générateurs de ces deux involutions.

Les groupes g, g', sont des sous-groupes d'un groupe d'ordre $2^{\alpha+2}3^\beta$. En effet, nous avons démontré, dans le travail cité plus haut, que si une surface de genres un possède une involution d'ordre deux et de genres zéro, bigenre un, elle en possède une autre d'ordre 2 et de genres un, et ces deux involutions en forment une d'ordre 4, rationnelle. On en déduit que les involutions I_n, I'_n font partie d'une involution rationnelle d'ordre $2n$, ce qui démontre notre assertion.

Les transformations génératrices des involutions I_n, I'_n *forment un groupe d'ordre* 2n *engendrant une involution rationnelle*

Nous allons examiner successivement les involutions des différents ordres; nous savons, par nos recherches sur les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un, que l'on a $n = 2, 4, 6, 8, 12, 16$. Nous laisserons de côté l'involution d'ordre 2, qui est bien connue.

6. *Involutions d'ordre 4.* — Les involutions I_4 peuvent être cycliques ou abéliennes (c'est-à-dire engendrées par un groupe abélien), mais elles ne peuvent posséder de points de coïncidence quadruples, car alors, l'involution d'ordre deux et de genres zéro, bigenre un, appartenant à la surface Φ_1, posséderait des points de coïncidence, ce qui est impossible.

(1) L. Godeaux, *Sur les surfaces de genres zéro et de bigenre un — loc. cit.*
(2) Notre *Mémoire* des Annales de l'Ecole Normale, *loc. cit.*

Entre la surface Φ_1 et la surface F existe une correspondance (1, 2) ayant 8 points de diramation sur Φ_1. L'involution I_4 possède donc, sur F, quatre groupes formés de points de coïncidence double. La surface Φ possède quatre points de diramation qui sont, comme on sait, quatre points doubles coniques.

Si l'involution I_4 est de seconde espèce, c'est-à-dire engendrée par deux transformations θ_1, θ_2 n'ayant aucun point invariants communs, elle est abélienne, c'est-à-dire que l'on a $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$. Une seule des trois transformations θ_1, θ_2, $\theta_1\theta_2$ engendre une involution de genres zéro et de bigenre un.

Les involutions d'ordre 4 et de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un, sont cycliques ou abéliennes; dans chaque cas elles possèdent quatre groupes formés de deux points de coïncidence double.

Nous donnerons actuellement un exemple d'une surface de genres un possèdant une involution cyclique d'ordre 4, de genres 0 et de bigenre un.

Considérons la surface du quatrième ordre

$$(1)\quad \begin{cases} a_{4000}x_1^4 + a_{0400}x_2^4 + a_{0040}x_3^4 + a_{0004}x_4^4 + a_{2020}x_1^2x_3^2 \\ \quad + a_{0202}x_2^2x_4^2 + a_{2101}x_1^2x_2x_4 + a_{1210}x_1x_2^2x_3 \\ \quad + a_{0121}x_2x_3^2x_4 + a_{1012}x_1x_3x_4^2 = 0. \end{cases}$$

Elle est transformée en elle-même par l'homographie cyclique de période 4

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : ix_2 : -x_3 : -ix_4.$$

Cette transformation engendre, sur la surface (1), une involution d'ordre 4 n'ayant que des points de coïncidence double (aux points de rencontre de la surface et des droites $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$); cette involution est donc bien de genres 0 et de bigenre un.

Nous avons d'autre part construit implicitement des surfaces de genres un contenant une involution d'ordre 4, de genres 0 et de bigenre 1. Nous avons en effet indiqué les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de genres 0, bigenre 1, Φ, soit l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface de mêmes genres [1], Φ'_1. Cette surface Φ'_1

---

[1] Voir nos *Mémoires* des Annales de Toulouse et du Bull. de la Soc. Math. de France.

est elle-même, d'après un théorème de M. Enriques rappelé plus haut, l'image d'une involution d'ordre deux appartenant à une surface F de genres un. Cette surface contient, comme on le voit aisément, une involution abélienne d'ordre 4 dont Φ est l'image.

7. *Involutions d'ordre 6.* — Supposons tout d'abord que l'involution I_6 soit cyclique, et soit T la transformation birationnelle de F en elle-même engendrant I_6. T^2 engendre une involution d'ordre 3 dont la surface image Φ_1 est certainement de genres un.

L'involution I'_6, d'ordre 6 et de genres un, est nécessairement engendrée par T^2 et par une transformation θ de période deux. Cette dernière engendre évidemment une involution de genres un. Il existerait donc, sur F, une involution de genres un, de 2^e espèce et d'ordre 6. Cela est impossible (voir tableau I), donc I_6 ne peut être cyclique.

Supposons maintenant l'involution I_6 engendrée par deux transformations T_1, T_2, respectivement de période 2, 3. On voit aisément que l'involution engendrée par T_1 est de genres 0 et de bigenre un, celle engendrée par T_2 de genre un. De plus, on a soit $T_1 T_2 = T_2 T_1$, soit $T_1 T_2 = T_2^2 T_1$, c'est-à-dire que l'involution I_6 est abélienne (les deux cas sont au fond équivalents). Soit maintenant θ la transformation engendrant, avec T_2, l'involution I'_6. Comme l'involution I'_6 ne peut être de seconde espèce, elle est cyclique et par suite, il existe une transformation θ' telle que $T_2 \equiv \theta'^2$, $\theta \equiv \theta'^3$.

L'involution I_6 possède trois groupes formés de deux points de coïncidence triple (invariants pour T_2).

Un involution d'ordre 6, de genres zéro et de bigenre un, appartenant à une surface de genres un, est abélienne et possède trois groupes formés de points de coïncidence triple. La surface de genres un possède une involution cyclique d'ordre six et de genres un.

La surface Φ, image de I_6, possède trois points de diramation triple qui sont des points doubles biplanaires ordinaires.

8. *Involutions d'ordre huit.* — Passons à l'étude des involutions d'ordre huit et commençons par déterminer les nombres de points de coïncidence d'une telle involution.

Remarquons tout d'abord que I_8 ne peut posséder de coïncidence octuple, car cela entrainerait l'existence de coïncidences pour l'involution d'ordre deux, de genres zéro et de bigenre un existant sur la surface Φ_2, de genres un. Partant de là, I_8 ne peut posséder que des points de coïncidence double ou quadruples. Désignons respectivemente par $4x_2$, $2x_4$ les nombres de ces points. En appelant S la classe effective de Φ et en calculant l'invariant de Zeuthen-Segre $I = 8$ de cette surface au moyen d'un faisceau de sections hyperplanes Γ, on trouve (1)

$$S + 2x_2 + 4x_4 - 3(2\pi - 2) = 12.$$

De même, pour F on a

$$8S + 4x_2 + 2x_4 - 24(2\pi - 2) = 24.$$

L'élimination de S et de π donne

$$2x_2 + 5x_4 = 12,$$

c'est-à-dire :

a) $x_2 = 1$, $x_4 = 2$, ou

b) $x_2 = 6$, $x_4 = 0$.

Le groupe g, générateur de l'involution I_8, peut être :

1° cyclique.

2° engendré par deux transformations de période 4.

3° engendré par une transformation de période 4 et d'une autre de période 2.

4° engendré par trois transformations de période 2.

Nous examinerons successivent ces différents cas.

Premier cas. — Si l'involution est cyclique, donc engendrée par une transformation T de période 8, l'involution I'_8, de genres un, et engendrée par T^2, de période 4 et par une transformation θ, nécessairement de période 4 également (voir tableau I) (2). L'involution I_8 possède quatre points de coïncidence quadruple et quatre points de coïncidence double. On a $T^4 = \theta^2$.

Deuxième cas. — Lorsque l'involution I_8 est engendrée par deux transformations T_1, T_2 toutes deux de période 4, I'_8 est nécessairement engendrée par l'une, T_1, de ces transformations et par une deuxième transformation, θ, de période 4 également. L'involution d'ordre 4, engendrée par T_2, est nécessairement de genres zéro et de bigenre un. On a $T_1^2 = T_2^2 = \theta^2$ et l'involution I_8 possède quatre points de coïncidence quadruple et 4 points de coïncidence double.

Troisième cas. — Soient respectivement T_1, T_2 les transforma-

(1) Voir, pour les calculs analogues, nos travaux antérieurs déjà cités.
(2) Et la note jointe à ce travail.

tions de période 2, 4 engendrant I_8. L'involution engendrée par une de ces transformations est de genres un, celle qui est engendrée par l'autre est de genres zéro, bigenre un.

Lorsque T_1 engendre une involution de genres zéro et de bigenre un, I_8 possède quatre points de coïncidence double et quatre points de coïncidence quadruple. I'_8 est engendrée par T_2 et par une transformation θ de période 4. On a $T_2^2 = \theta^2$, $T_1 T_2^2 = T_2^2 T_1$ et soit $T_1 T_2 = T_2 T_1$, soit $T_1 T_2 = T_2^3 T_1$.

Lorsque T_1 engendre une involution de genres un, I_8 possède 24 points de coïncidence double. I'_8 est engendrée par T_1, T_2^2 et une troisième tranformation θ de période 2. On a $T_1 T_2^2 = T_2^2 T_1$ et soit $T_1 T_2 = T_2 T_1$, soit $T_1 T_2 = T_2^3 T_1$.

Quatrième cas. — Si I_8 est engendrée par trois transformations T_1, T_2, T_3 de période 2, on a évidemment $T_1 T_2 = T_2 T_1$, $T_1 T_3 = T_3 T_1$. I_8 possède 24 points de coïncidence double et I'_8 est engendré par T_2, T_3 et une transformation θ de période 2. Des trois transformations T_1, T_2, T_3, T_1 seule engendre une involution de genres zéro, bigenre 1 ; les autres engendrent des involutions de genres un.

En résumé :

Les involutions d'ordre huit et de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un, peuvent être:

a) *cycliques.*

b) *composées au moyen de deux involutions d'ordre 4 dont l'une est de genres un, l'autre de genres zéro et de bigenre un.*

c) *composées au moyen d'une involution d'ordre 4 et de genres un, et d'une involution d'ordre 2, de genres zéro et de bigenre un.*

d) *composées au moyen d'une involution d'ordre 2 et de genres un, et d'une involution d'ordre 4, de genres 0 et de bigenre un.*

e) *composées au moyen de trois involutions d'ordre deux, l'une de genres zéro, bigenre un, les deux autres de genres un.*

Dans les trois premiers cas, l'involution possède quatre points de coïncidence quadruple et quatre points de coïncidence double; dans les deux derniers, vingt-quatre points de coïncidence double.

9. *Involutions d'ordre 12.* — Considérons la suite de surfaces $\Phi_0 \equiv F$, Φ_1, Φ_2, $\Phi_3 \equiv \Phi$ relative à I_{12}. Ainsi qu'on l'a établi, on peut toujours supposer que Φ_2 est de genres un. Par suite, entre Φ et Φ_2 la correspondance a l'indice 2 et on voit que Φ_2 représente une involution d'ordre 6 et de genres un, appartenant à F. Cette involution est cyclique (tableau I). D'autre part, l'involution I_{12} ne peut être cyclique car il ne serait de même de l'involution d'ordre 6 appartenant à Φ_1 et dont Φ est l'image, ce qui est impossible (§ 7). I_{12} est donc engendrée par deux

transformations : l'une T_1, est de période 6 et l'autre T_2, de période 2 ou 4, engendre une involution de genres zéro et de bigenre un.

L'involution I'_{12} est engendrée (voir tableau I) par T_1 et par une transformation θ, de période 4, telle que $T_1^3 = \theta^2$.

Supposons en premier lieu que T_2 ait la période 2. Il existe, sur F, trois involutions : I_{12}, engendrée par T_1 et T_2, I'_{12} engendrée par T_1 et θ ; et une troisième involution rationnelle, engendré par T_2 et θ. Ces trois involutions en composent une quatrième, rationnelle, d'ordre 24. Les pointe de F qui sont à la fois conjugués pour T_2 et θ soint des points de coïncidence pour cette involution d'ordre 24. La courbe de coïncidence, lieu de ces points, passe par les points de F invariants pour T_1. L'involution I_{12} possède un groupe formé de 2 points de coïncidence 6-uple, un groupe formé de 4 points de coïncidence triple et un groupe formé de six points de coïncidence double.

Supposons ensuite que T_2 ait la période 4. On a, nécessairement, $T_1^3 = T_2^2$. Alors, sur la surface qui représente l'involution de genres zéro et de bigenre un image de l'involution engendrée par T_2 sur F, il existe une involution d'ordre trois possèdant trois points de coïncidence triple. Sur la surface de genres un, image de l'involution engendrée par T_1^2, il existe une involution d'ordre 4 qui doit possèder huit points de coïncidence double. Or, cette involution n'en possède actuellement que six, à savoir deux dans le domaine du premier ordre de chacun des points correspondant aux coïncidences sextriples, et deux correspondant aux deux groupes formés de coïncidences doubles. La seconde hypothèse est donc à rejeter.

Les involutions d'ordre douze et de genres zéro, bigenre un appartenant à une surface de genres un, sont engendrées par une transformation de période 6 et par une transformation de période 2. La première engendre une involution de genres un, la seconde une involution de genres zéro, bigenre un. Chacune de ces involutions possède trois groupes formés de points de coïncidence respectivement sexuple, triple et double.

On voit aisément que l'on a soit $T_2T_1 = T_1T_2$ soit $T_2T_1 = T_1^5T_2$.

10. *Involutions d'ordre 16.* — Considérons une involution I_{16} d'ordre 16 et la suite de surfaces $\Phi_0 \equiv F$, Φ_1, Φ_2, Φ_3, $\Phi_4 \equiv \Phi$ toutes, sauf Φ, de genres un.

L'involution d'ordre 8 et de genres un, appartenant à F et dont Φ_3 est l'image, ne peut être de première espèce, car le nombre des points de diramation de même ordre sur Φ_3, doit être pair (voir tableau I). Par suite, cette involution est engendrée par trois transformations T_1, T_2, T_3, de période 2. Cette involution d'ordre 8 possède 14 groupes formés de points de coïncidence double. On a $T_1 T_2 = T_2 T_1$, $T_1 T_3 = T_3 T_1$.

Deux cas peuvent se présenter :

a) le groupe g, générateur de I_{16}, est engendré par T_1, T_2, T_3 et une transformation T_4, involutive, engendrant une involution de genres zéro, bigenre un. On a dans ce cas $T_1 T_4 = T_4 T_1$, $T_2 T_4 = T_4 T_2$, $T_3 T_4 = T_4 T_3$, c'est-à-dire que l'involution I_{16} est abélienne. La surface Φ a sept points de diramation double.

b) le groupe g est engendré par T_1, T_2 et une transformation θ, de période 4, engendrant une involution de genres 0, bigenre un, telle que $\theta^2 \equiv T_3$. La surface Φ a sept points de diramation double.

Les involutions d'ordre 16, de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres un, possèdent sept groupes formés de 8 points de coïncidence double. Elles sont engendrées soit par quatre transformations involutives, formant un groupe abélien, soit par deux transformations involutives et une transformation de période quatre. Dans le premier cas une des transformations engendre une involution de genres zero et de bigenre un. Dans le second cas, c'est la transformation de période quatre.

11. *Conséquence des résultats précédents.* — On peut conclure de ce qui précède le théorème suivant :

Les involutions de genres zero, bigenre un, appartenant à une surface de genres un, sont d'ordres 2, 4, 6, 8, 12 et 16.

De ce résultat en découle un autre concernant les involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de mêmes genres.

Considérons une involution d'ordre n et de genres zéro, bigenre un, I_n, appartenant à une surface Ψ de mêmes genres. D'après un théorème de M. Enriques déjà invoqué au début de ce travail, Ψ représente une involution d'ordre deux appartenant à une surface F de genres un. Il en résulte que F possède une involution I_{2n}, d'ordre $2n$ et de genres zéro, bigenre un. Nous venons de montrer que $2n = 2$, 4, 6, 8, 12 ou 16. Or, nos premières recherches sur les involutions de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ sur des surfaces de mêmes genres, nous avaient conduit à $n = 2$, 3, 4, 6, 8 ou 9. On voit donc que l'on ne peut avoir $n = 9$, donc :

Les involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de mêmes caractères, sont d'ordres 2, 3, 4, 6 ou 8.

12. *Note sur les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un.* — Nous avons conclus, dans notre petite note publiée dans les *Annales de l'Université de Jassy* et citée plus haut, à l'existence d'involutions d'ordre 8, de seconde espèce et de genres un, appartenant à une surface de genres un, engendrées par une transformation de période 4 et une de période 2. On peut voir que de telles involutions ne peuvent pas exister.

Soit, sur une surface F de genres un, I_8 une involution engendrée par deux transformations T_1, T_2, respectivement de périodes 4, 2, et qui soit de genres un. Cette involution possède, comme nous l'avons vu, quatre points de coïncidence d'ordre 4, 36 d'ordre 2. Mais alors, l'involution d'ordre 4 appartenant à la surface image de l'involution engendrée par T_2 ne possède que deux points de coïncidence quadruple, puisque T_2 ne laisse invariant aucun point invariant pour T_1, I_8 étant de seconde espèce. Cela est impossible, donc I_8 n'existe pas.

Une involution de seconde espèce d'ordre huit et de genres un, appartenant à une surface de genres un, est abélienne et n'est composée avec aucune involution cyclique d'ordre quatre.

Ramscappelle (Nieuport), 12 Novembre 1915.

TABLEAU I

Involutions de genres un appartenant à une surface de genres un

Ordre	Espèce	Périodes des transformations				Nombre de groupes formés de points de coïncidence d'ordre						Caractères du groupe générateur de l'involution
		T_1	T_2	T_3	T_4	2	3	4	6	8	12	
2	1	2	–	–	–	8	–	–	–	–	–	Cyclique.
3	1	3	–	–	–	–	6	–	–	–	–	Cyclique.
4	1	4	–	–	–	2	–	4	–	–	–	Cyclique.
4	2	2	2	–	–	12	–	0	–	–	–	Abélien.
6	1	6	–	–	–	2	2	–	2	–	–	Cyclique.
8	1	4	4	–	–	0	–	3	–	2	–	$T_1^{-1} T_2 T_1 = T_2^{-1}$
8	1	4	3	–	–	1	–	0	–	4	–	$T_1^{-1} T_2 T_1 = T_2^{-1}$
8	2	2	2	2	–	14	–	0	–	0	–	Abélien
9	2	3	3	–	–	–	8	–	–	–	–	Abélien
12	1	4	3	–	–	0	1	2	0	–	2	$T_1^{-1} T_2 T_1 = T_2^{-1}$
16	2	2	2	2	2	15	–	0	–	0	–	Abélien

TABLEAU II

Involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genres zéro, bigenre un

Ordre	Espèce	Périodes des transformations T_1	T_2	T_3	Nombres de groupes formés de points de coïncidence d'ordre 2	3	4	6	Caractères du groupe générateur de l'involution
2	1	2	–	–	4	–	–	–	Cyclique
3	1	3	–	–	–	3	–	–	Cyclique
4	1	4	–	–	1	–	2	–	Cyclique
4	2	2	2	–	6	–	–	–	Abélien
6	1	6	–	–	1	1	–	1	Cyclique
8	2	2	2	2	7	–	–	–	Abélien

TABLEAU III

Involutions de genres zéro et de bigenre un appartenant à une surface de genres un

Ordres	Espèces	Périodes des transformations T_1	T_2	T_3	T_4	Nombre de groupes formés de points de coïncidence d'ordre 2	3	4	6	Caractères du groupe générateur de l'involution
2	1	2	–	–	–	0	–	–	–	Cyclique
4	1	4	–	–	-	4	–	0	–	Cyclique
4	2	2	2	–	–	4	–	0	–	Abélien
6	2	2	3	–	–	0	3	–	0	$T_1 T_2 = T_2 T_1$ ou $T_1 T_2 = T_2^2 T_1$
8	1	8	–	–	–	1	–	2	–	Cyclique
8	2	4	4	–	–	1	–	2	–	$T_1^2 = T_2^2$
8	2	2	4	–	–	1	–	2	–	$T_1 T_2 = T_2 T_1$ ou $T_1 T_2 = T_2^3 T_1$
8	2	2	4	–	–	6	–	0	–	$T_1 T_2^2 = T_2^2 T_1$, $T_1 T_2 = T_2 T_1$ ou $T_2^3 T_1$
8	2	2	2	2	–	6	–	0	–	Abélien
12	2	6	2	–	–	1	1	0	1	$T_2 T_1 = T_1 T_2$ ou $T_2 T_1 = T_1^5 T_2$
16	2	2	2	4	–	7	–	0	–	$T_1 T_3^2 = T_3^2 T_1$, $T_2 T_3^2 = T_3^2 T_2$
16	2	2	2	2	2	7	–	0	–	Abélien