Bulletin de la Classe des sciences

Une propriété des variétés de Segre

Lucien Godeaux

Résumé
Recherche de la dimension d'une variété de Veronese tracée sur la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces à n dimensions.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Une propriété des variétés de Segre

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Recherche de la dimension d'une variété de Veronese tracée sur la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces à n dimensions.

On sait que sur la variété de Segre représentant dans un espace linéaire à $n(n + 2)$ dimensions les couples de points de deux espaces linéaires à n dimensions, à une homographie entre ces deux espaces correspond une variété de Veronese à n dimensions, représentant les hyperquadriques d'une espace linéaire à n dimensions. Nous avions été conduit par certaines recherches à examiner si la variété de Segre envisagée pouvait contenir des variétés de Veronese de dimension inférieure à n. La réponse est négative et nous établissons le théorème suivant :

Une variété de Veronese tracée sur la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces linéaires à n *dimensions, a nécessairement la dimension* n.

1. Considérons la variété de Segre V_{2n} représentant les couples de points de deux espaces linéaires à n dimensions, (y), (z), dont les coordonnées ponctuelles homogènes sont respectivement $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et $z_0, z_1, \ldots, z_n$. En posant

$$X_{ik} = y_i z_k,$$

les équations de la variété V_{2n} dans un espace linéaire à $n(n+2)$ dimensions sont obtenues en écrivant que le déterminant

$$|\, X_{ik} \,|, \qquad (i,k = 0,1,\ldots,n) \tag{1}$$

est de caractéristique un.

Observons que l'ordre dans lequel on écrit les coordonnées est indifférent. Si l'on permute par exemple y_i et y_j et ensuite z_i et z_j, les équations (1) représenteront toujours la même variété de Segre.

Rappelons que l'ordre de la variété V_{2n} est

$$N = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}.$$

2. Supposons que pour des valeurs déterminées de i et de k, on ait

$$X_{ik} = X_{ki}.$$

En changeant la numérotation des coordonnées comme il a été dit plus haut, on peut supposer que l'on a $i = 2$ et $k = 3$. On suppose donc

$$X_{23} = X_{32} \ , \quad y_2 z_3 = y_3 z_2.$$

et on peut supposer en outre en choisissant convenablement le facteur de proportionnalité des coordonnées que l'on a

$$z_2 = y_2 \ , \quad z_3 = y_3.$$

Des équations de la variété V_{2n} on tire

$$X_{31}X_{23} = X_{21}X_{33} \ , \qquad X_{13}X_{32} = X_{12}X_{33},$$

d'où, par division membre à membre,

$$\frac{X_{31}}{X_{13}} = \frac{X_{21}}{X_{12}} = \rho.$$

Mais on a

$$X_{13}X_{31} = X_{11}X_{33} = \rho X_{13}^2,$$

d'où

$$\rho y_1^2 z_3^2 = y_1 z_1 z_3^2, \qquad \rho y_1 = z_1.$$

En désignant par O_i le point de l'espace (y) dont toutes les coordonnées sont nulles sauf y_i et par O_i' le point analogue de l'espace (z), on voit qu'entre les plans $O_1O_2O_3$ et $O'_1O'_2O'_3$, on a une homographie

$$\rho y_1 = z_1 \ , \quad y_2 = z_2 \ , \quad y_3 = z_3.$$

On peut choisir le point unitaire du premier plan de manière à avoir $\rho = 1$.

Cela étant, en reprenant le raisonnement qui vient d'être fait, on en déduit $y_0 = z_0$.

3. Des résultats précédents, on déduit que si l'on a

$$X_{i-1,\, i} = X_{i,\, i-1},$$

c'est-à-dire

$$z_{i-1} = y_{i-1} \ , \quad z_i = y_i,$$

on a

$$z_0 = y_0, \ z_1 = y_1, \ \ldots, \ z_i = y_i$$

sauf si $i = 1$, auquel cas le raisonnement précédent n'est plus applicable. Mais alors si l'on a $X_{01} = X_{10}$, il suffit de changer la numérotation des coordonnées y et z pour retomber dans le cas précédent. De même, de $X_{ik} = X_{ki}$ on peut tirer $X_{i-1,\, i} = X_{i,\, i-1}$. Donc :

Si l'on a $X_{ik} = X_{ki}$ *pour des valeurs déterminées de* i *et* k, *la relation est valable quels que soient* i *et* k.

La variété de Segre V_{2n} appartient à $\binom{n+1}{2}^2$ hyperquadriques linéairement indépendantes. On obtient l'équation d'une de ces hyperquadriques en effaçant $n - 1$ lignes et $n - 1$ colonnes du déterminant (1). Si l'on égale à zéro les coordonnées figurant dans ces lignes et ces colonnes on obtient dans un espace à trois dimensions l'équation

$$X_{jk}X_{jh} - X_{jk}X_{ih} = 0$$

d'une quadrique non conique.

En d'autres termes la variété V_{2n} appartient à $\binom{n+1}{2}^2$ hyperquadriques $n(n-2)$ fois spécialisées, c'est-à-dire à des cônes ayant pour sommets des espaces linéaires à $n(n-2)$ dimensions.

Parmi ces hyperquadriques, on trouve celle d'équation

$$X_{ik}X_{ki} - X_{ii}X_{kk} = 0.$$

Si $X_{ik} = X_{ki}$, cette quadrique devient

$$X_{ik}^2 - X_{ii}X_{kk} = 0,$$

c'est-à-dire une hyperquadrique $n(n-2)+1$ fois spécialisée.

Remarquons que si, dans l'équation (1), on a $X_{ik} = X_{ki}$, elles représentent dans un espace linéaire à $\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions, une variété de Veronese V_n d'ordre 2^n dont les sections hyperplanes représentent les hyperquadriques d'un espace linéaire à n dimensions.

Si, parmi les $\binom{n+1}{2}^2$ *hyperquadriques* $n(n-2)$ *fois spécialisées contenant la variété de Segre* V_{2n}, *il en existe une* $n(n-2)+1$ *fois spécialisée, elle est circonscrite à une variété de Veronese* V_n *tracée sur la variété* V_{2n}.

Liège, le 20 février 1967.