GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — **Lucien Godeaux**, *Recherches sur les surfaces de genres un* (Première note). Présentée par M. Țițeica, M.A.R., dans la séance du 1-er mai 1914.

On sait que les surfaces algébriques de genres un ($p_a = P_4 = 1$) peuvent admettre des groupes infinis discontinus de transformations birationnelles en elles-mêmes. La détermination de toutes celles de ces surfaces qui possèdent de pareils groupes est un problème qui est encore loin d'être résolu. On ne connaît que deux exemples de ces surfaces: la surface du quatrième ordre contenant une sextique (gauche) de genre deux [1] et la surface du quatrième ordre contenant une sextique (gauche) de genre trois [2]. Dans chacun de ces exemples, les transformations birationnelles non périodiques de la surface sont le produit de deux transformations involutives. C'est cette particularité qui m'a conduit chercher à déterminer toutes les surfaces de genres un possédant deux transformations birationnelles cycliques dont le produit est cyclique. La solution de ce problème fera certainement faire un grand pas vers la solution de celui dont il est question plus haut.

Dans cette première note, je vais déterminer les surfaces de genres un possédant deux transformations birationnelles involutives permutables en elle-même, engendrant des involutions rationnelles, et dont le produit engendre une involution de genres un.

1. Soit F une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possédant deux transformations birationnelles involutives permutables, T_1, T_2, engendrant respectivement deux involutions I_2', I_2'' rationnelles, et dont le produit $T_3 = T_1T_2 = T_2T_1$ engendre une involution I_2''' de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Désignons par Φ_1, Φ_2, Φ_3 les surfaces qui représentent

(1) **Fano**, *Rend. Istit. Lomb.* 1906; **Severi**, *Rend. Circ. Palermo*, 1910.
(2) **Godeaux**, *Bull. Acad. Cracovie*, 1913.

*

respectivement les involutions I'_2, I''_2, I'''_2. Φ_1 et Φ_2 seront donc rationnelles et Φ_3 de genres un.

Les trois transformations T_1, T_2, T_3, engendrent une involution I_4; nous désignerons par Φ une surface représentative de cette involution. Remarquons qu'aux groupes de I_4 correspondent sur Φ_1 des couples de points formant une involution dont Φ est une surface representative. Φ étant rationnelle, il en est de même de Φ, d'après le théorème de **M. Castelnuovo.**

2. Aux groupes de I_4 correspondent sur Φ_3 des couples de points formant une involution I_2 rationnelle dont Φ est une surface représentative. Nous pouvons supposer que Φ est un plan, Φ_3 sera alors un plan double de genres un.

Un point A_1, invariant pour T_1 est transporté par T_2 et $T_3=T_1T_2$, en un point A_2 également invariant pour T_1. Au couple de points A_1A_2 correspond, sur Φ_3, un seul point uni de l'involution I_2. Par conséquent, la courbe de diramation D du plan double Φ_3 contient la courbe D_1 aux points de laquelle correspondent sur F, des points invariants pour T_1. De même, D comprend la courbe D_2 aux points de laquelle correspondent sur F, des points invariants pour T_2.

Inversement, à un point de la courbe D correspond sur la surface F un groupe de deux points invariants pour l'une des transformations T_1, T_2, T_3. Mais il n'y a que huit points invariants pour T_3 [1], donc D se compose des deux courbes D_1, D_2 et éventuellement de quelques points isolés dont le nombre ne dépasse pas huit.

Remarquons d'ailleurs qu'aux points communs à D_1, D_2 correspondent sur F des points invariants pour T_1, T_2 et par suite pour T_3.

Entre Φ et Φ_1 nous avons une correspondance (1, 2) dont

(1) Godeaux, *C. R.*, 2° sem. 1912; *Bull. Acad. Belgique*, 1913.

la courbe de diramation est D_1. Φ_1 est donc un plan double rationnel et il en est de même de Φ_2.

Désignons par $f_1(x,y)=o, f_2(x,y)=o$ respectivement les équations des courbes D_1, D_2.

La surface F a pour équations

$$z^2=f_1(x,y), \quad u^2=f_2(x,y).$$

Les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3 ont respectivement pour équation

$$z^2=f_1(x,y), \quad z^2=f_2(x,y), \quad z^2=f_1(x,y)\,f_2(x,y).$$

3. Pour déterminer la forme des fonctions $f_1 f_2$, remarquons qu'il résulte d'un théorème de M. Enriques [1] que l'ensemble des courbes D_1, D_2 doit former:

a. Une courbe du sixième ordre;

b. Une courbe du huitième ordre ayant deux points quadruples distincts ou infiniment voisins;

c. Une courbe du dixième ordre ayant un point multiple d'indice sept auquel sont infiniment voisins deux points triples distincts;

d. Une courbe du douzième ordre ayant un point multiple d'ordre neuf auquel sont infiniment voisins trois points triples distincts.

D'autres part, par un théorème de M. Noether [2], chacune des courbes D_1, D_2 peut se ramener, par une transformation birationnelle, à:

α. Une courbe du quatrième ordre;

β. Une courbe d'ordre $2n$ ayant un point $(2n-2)$-uple ;

γ. Une courbe d'ordre six ayant deux points triples infiniment voisins.

Enfin, ainsi qu'on l'a dit plus haut, D_1 et D_2 ont au plus huit points communs (un point commun à D_1, D_2 doit être compté une fois si ce point est de multiplicité impaire

---

(1) **Enriques,** *Mem. Soc. dei XL,* 1896.

(2) **Castelnuovo-Enriques,** *Rend. Circ. Palermo,* 1901.

pour les deux courbes, il ne doit pas être compté dans les autres cas).

On trouve alors que les cas suivants peuvent se présenter:

A. D_1, est une quartique,

D_2 est une conique;

B. D_1 et D_2 sont des quartiques ayant deux points doubles communs;

C. D_1 est une courbe d'ordre six ayant deux points triples infiniment voisins,

D_2 est une conique passant par ces points.

D. D_1 est une courbe d'ordre six ayant un point quadruple P auquel sont infiniment voisins deux points doubles distincts;

D_2 est une quartique ayant un point triple en P, deux branches passant par les points doubles infiniment voisins de D_1;

E. D_1; est une courbe d'ordre huit ayant un point sextuple P auquel sont infiniment voisins trois points doubles distincts,

D_2 est une courbe du quatrième ordre ayant un point triple en P, les trois branches passant par les points doubles infiniment voisins de D_1.