GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — LUCIEN GODEAUX, *Sur les surfaces de genres un possédant deux réseaux de courbes de genre deux* (deuxième note). Note présentée par M. ȚIȚEICA, M.A.R., dans la séance du 2 janvier 1914.

Dans une note publiée ici-même sous le même titre [1], j'ai établi que si une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possède deux réseaux de courbes de genre deux (et par conséquent de degré deux), les transformations birationnelles involutives de la surface en elle-même déterminées par ces réseaux, ne peuvent être permutables. Ce théorème a besoin d'être précisé. Il faut, en effet, que la surface considérée ne possède pas de faisceau de courbes elliptiques invariantes pour l'une ou l'autre des transformations. En d'autres termes, il faut que les courbes lieux de points invariants pour chacune de ces transformations soient de genre dix. C'est ce que je vais établir dans cette note en donnant une nouvelle démonstration du théorème.

1. Soit F une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possédant deux réseaux de courbes de genre deux $|C_1|$, $|C_2|$. On sait que ces réseaux sont de degré

[1] *Bull. de la Section Scient. de l'Académie Roumaine*, t. II, 1913.

*

deux et par conséquent déterminent deux transformations birationnelles involutives de F en elle même que nous désignerons respectivement par T_1, T_2. Nous supposerons:

a. Que la surface F ne possède pas de faisceaux de courbes elliptiques invariantes soit pour T_1, soit pour T_2;

b. Que les transformations T_1, T_2, sont permutables; et nous démontrerons que l'on est conduit à une absurdité.

2. Rapportons projectivement les courbes C_1 aux droites d'un plan α. Nous obtenons un plan double

$$z^2 = f(x, y)$$

birationnellement identique à la surface F, $f(x\ y)$ étant un polynôme de degré six en x, y. Nous indiquerons encore par F cette surface.

Le courbe $f(x, y) = 0$ ne possède pas de point multiple, car l'existence d'un point double ou triple conduirait à l'existence d'un faisceau de courbes elliptiques invariantes pour T_1, et l'existence d'un point quadruple conduirait à la rationnalité de la surface F.

T_2 étant permutable avec T_1, change une courbe C_1 en une courbe C_1 et par suite donne naissance à une homologie harmonique dans le plan α. Celle-ci change la courbe de diramation $f(x, y) = 0$ du plan double en elle-même.

Toutes les homologies harmoniques du plan étant projectives, nous pouvons supposer que celle que nous envisageons dans le plan α a pour droite unie l'axe des x et pour point uni le point à l'infini sur l'axe des y. Ses équations sont alors $x' = x$, $y' = -y$ et la courbe de diramation $f(x, y)$ a l'équation:

$$f(x,y) \equiv y^6 + y^4\, f_2(x) + y_2\, f_4(x) + f_6(x) = 0,$$

les $f_k(x)$ étant des polynômes de degré k en x.

Nous voyons donc que l'on peut prendre pour F la surface représentée par l'équation:

$$z^2 = y^6 + y^4 f_2(x) + y^2 f_4(x) + f_6(x).$$

3. La surface F admet, outre T_1, les deux transformations birationnelles involutives θ_1, θ_2 respectivement d'équations

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = z, \qquad (\theta_1)$$
$$x' = x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \qquad (\theta_2)$$

et qui donnent naissance toutes deux, dans α, à l'homologie $x' = x$, $y' = -y$. L'une de ces deux transformations devrait donc coïncider avec T_2. Pour voir si cela est possible, considérons les points de F invariants pour θ_1 et θ_2.

Evidemment, un point invariant pour l'une ou l'autre de ces transformations correspondra à un point du plan α uni pour l'homologie $x' = x$, $y' = -y$. On voit que:

a. Les points invariants pour θ_1 sont les points de la courbe $y = o$, $z = f_6(x)$, c'est-à-dire les points d'une courbe de genre deux;

b. Les points invariants pour θ_2 sont les six points représentés par les équations $f_6(x) = o$, $y = z = o$ et les deux points de la surface situés sur la droite à l'infini du plan des yz, en dehors de l'axe des $z (x = o, y = z = \infty)$.

Par conséquent, aucune des transformations θ_1, θ_2 ne peut coïncider avec T_2 et nous voyons que:

Si une surface de genres un possède deux transformations birationnelles involutives engendrant deux involutions rationnelles, mais ne laissant ni l'une ni l'autre invariantes les courbes elliptiques d'un faisceau, ces transformations ne peuvent être permutables.

4. On peut aller plus loin dans l'étude du plan double

$$z^2 = y^6 + y^4 f_2(x) + y^2 f_4(x) + f_6(x)$$

si l'on néglige l'hypothèse de l'existence de la transformation T_2.

Considérons les courbes D déterminées sur la surface F par les cylindres d'équations

$$y^2=\lambda_1 x^2+\lambda_2 x+\lambda_3,$$

où les λ sont des paramètres variables. Ces courbes sont de genre cinq, forment un système linéaire (incomplet) de dimensions trois et sont invariantes pour T_1, θ_1 et θ_2. Comme ces transformations sont deux-à-deux permutables, le système $|D|$ est composé avec une involution I_4 d'ordre quatre engendrée par ces transformations. Si donc nous rapportons projectivement les courbes D aux plans d'un S_3, F se transforme en une quadrique quadruple Q.

Aux courbes tracées sur F par les plans $x=$const. correspondent sur Q des droites, car ces courbes rencontrent les D en quatre points formant un groupe de I_4. Ces droites ont d'ailleurs en commun le point P correspondant aux deux points de F situés sur la droite à l'infini du plan des yz, invariants pour θ_2. La quadrique Q est donc un cône de sommet P.

A la courbe invariante pour T_1 correspond sur Q une courbe double K_1 découpée sur ce cône par une surface cubique. A la courbe invariante pour θ_1 correspond une conique double K_2 de Q.

5. La transformation θ_1 engendre une involution d'ordre deux qui est rationnelle, puisqu'elle possède une courbe de coïncidence $z^2=f_6(x)$, $y=o$. Soit π un plan représentant cette involution. Entre Q et π, on a une correspondance *(1, 2)* qui possède, sur Q, comme points de diramation, les points de la courbe K_1 et le point P. Par suite, aux sections planes de Q correspondente, dans π, des courbes de genre deux (formant un système linéaire ∞^3). On en conclut que l'on peut représenter F par un plan

double π possédant une sextique de diramation douée de huit points doubles [1].

6. Nous avons vu que l'involution engendrée par θ_2 possède huit points de coïncidence. Il résulte de nos recherches antérieures [2] que c'est une involution de genres un. On peut voir qu'elle est représentable sur une surface d'ordre *16*, de S_9, à sections planes de genre *9*, possédant huit points doubles coniques.

En resumé: *Le plan double*

$$z^2 = y^6 + y^4 f_2(x) + y^2 f_4(x) + f_6(x)$$

peut se transformer birationnellement en un plan double doué d'une sextique de diramation possédant huit points doubles, et en une surface double d'ordre 18, *de* S_9, *à sections de genre 9, possédant huit points de diramation.*

M. *Enriques* avait d'ailleurs déjà remarqué qu'un plan double ayant une sextique de diramation doué de huit points doubles possède une autre involution d'ordre deux[3].

Nous espérons publier prochainement un Mémoire consacré aux surface de genres un possédant un groupe abélien de transformations birationnelles involutives; nous renvoyons le lecteur à ce travail pour de plus amples détails sur le plan double envisagé ici.

---

(1) **F. Enriques.** Sui piani doppi di genere uno, *Memorie della Società Italiana delle Scienze* (dei XL). 1896, (3), X.

(2) **L. Godeaux**, Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un, *Bull. de l'Académie Royale, de Belgique*, 1913.

(3) *loc. cit.*