Bulletin de la Classe des sciences

Sur une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq (3e note)

Lucien Godeaux

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Sur une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq (3e note). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 53, 1967. pp. 907-912;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1967.62961;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1967_num_53_1_62961;

Fichier pdf généré le 22/02/2024

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Troisième note).

Dans les deux premières notes, nous avons cherché à construire, dans un espace linéaire à cinq dimensions, une surface d'ordre 16 contenant une courbe canonique de genre cinq, dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques. Comme on a pu le voir, les calculs sont très longs et nous n'avons obtenu les équations de la surface que comme section par deux hyperplans d'une variété à quatre dimensions d'un espace S_7 (1). Dans cette nouvelle note, nous abandonnons la condition que les sections hyperplanes de la surface soient ses courbes bicanoniques. Précisément, nous construisons une surface du seizième ordre possédant une seule courbe canonique de genre cinq, appartenant à un espace linéaire à cinq dimensions, mais dont les sections hyperplanes tout en ayant le même genre et la même dimension que le système bicanonique, ne forment pas ce système. La courbe canonique appartient à un faisceau de sections hyperplanes et se compose de deux branches infiniment voisines d'une biquadratique gauche.

(1) Les deux premières notes sont parues dans le *Bulletin de l'Académie*, 1966, pp. 926-934 ; 1967, pp. 17-20.

1. Nous avons considéré dans S_6 une surface F, intersection de quatre hyperquadriques, transformée en soi par l'homographie H de période quatre

$$\frac{y_0'}{y_0} = \frac{y_1'}{y_1} = \frac{y_2'}{-y_2} = \frac{y_3'}{y_3} = \frac{z_0'}{iz_0} = \frac{z_1'}{-iz_1} = \frac{z_2'}{-iz_2}.$$

La surface F est définie comme intersection de quatre hyperquadriques dont les équations figurent au n° 4 de la première note. Remarquons que les deux premières équations peuvent être résolues par rapport à z_0z_1 et z_0z_2. L'élimination de z_1z_2 entre les deux dernières donne

$$c_{12}'(c_{00}z_0^2 + c_{11}z_1^2 + c_{22}z_2^2) - c_{12}(c_{00}'z_0^2 + c_{11}'z_1^2 + c_{22}'z_2^2) = 0.$$

en fonction de y_0, y_1, y_2, y_3. On peut d'ailleurs choisir le point unitaire du plan des z pour que cette expression se réduise à $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2$. On en déduit ensuite z_1z_2 en fonction des y.

Posons, en changeant la valeur des cœfficients,

$$\varphi' = a_{00}y_0^2 + a_{01}y_0y_1 + a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{23}y_2y_3 + a_{33}y_3^2,$$
$$\varphi_2 = a_{00}'y_0^2 + a_{01}'y_0y_1 + a_{11}'y_1^2 + a_{22}'y_2^2 + a_{23}'y_2y_3 + a_{33}'y_3^2.$$
$$\varphi = b_{02}y_0y_2 + b_{12}y_1y_2 + b_{03}y_0y_3 + b_{13}y_1y_3,$$
$$\varphi' = b_{02}'y_0y_2 + b_{12}'y_1y_2 + b_{03}'y_0y_3 + b_{13}'y_1y_3.$$

Les équations des quatre hypersurfaces s'écrivent

$$\left.\begin{array}{c} z_0z_1 = \varphi_1, \quad z_0z_2 = \varphi_2, \quad z_1z_2 = \varphi, \\ z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = \varphi'. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Nous désignerons par I_4 l'involution du quatrième ordre engendrée par H sur la surface F. Cette involution est privée de points unis.

2. L'homographie H^2 a pour axes le plan (z) et l'espace (y). Elle engendre sur F une involution I_2, d'ordre deux, privée de points unis.

Pour avoir l'équation d'une image de cette involution, il suffit de projeter F du plan (z) sur l'espace (y), c'est-à-dire d'éliminer les z entre les équations (1). On obtient ainsi l'équation

$$\varphi_1^2\varphi_2^2 + \varphi^2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \varphi\varphi'\varphi_1\varphi_2.$$

cette équation représente une surface F′ d'ordre huit, passant doublement par les trois biquadratiques

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \quad \varphi = \varphi_1 = 0, \quad \varphi = \varphi_2 = 0$$

et triplement par les huit points

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = 0.$$

Les adjointes sont les surfaces du quatrième ordre

$$\lambda_0\varphi_1\varphi_2 + \lambda_1\varphi\varphi_1 + \lambda_2\varphi\varphi_2 = 0.$$

Les courbes canoniques de F′ correspondent donc aux courbes canoniques de F découpées par les hyperplans

$$\lambda_0 z_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0$$

formant le système de dimension minimum compris dans le système canonique de F et composé avec I_2.

3. A l'homographie H correspond l'homographie H′ d'équations

$$\frac{y'_0}{y_0} = \frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{-y_2} = \frac{y'_3}{-y_3}$$

qui transforme F′ en soi. Elle détermine sur cette surface une involution I_2 d'ordre deux qui correspond à l'involution I_4 de F.

Les axes de H′ sont les droites $y_0 = y_1 = 0, y_2 = y_3 = 0$. La surface F′ rencontre chacune de ces droites en quatre points doubles pour la surface.

Considérons les points donnés par

$$y_2 = y_3 = \varphi_1 = 0$$

sur F′. Il leur correspond sur F les points donnés par

$$z_0 z_1 = 0, \quad z_0 z_2 = \varphi_2, z_1 z_2 = 0, \quad z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0.$$

On voit que ces points se répartissent en deux groupes de quatre points appartenant à I_4. Cela explique que les points considérés sur les axes de H′, doubles pour F, ne sont pas des points unis de l'involution I'_2. Celle-ci est donc, comme I_4, privée de points unis.

4. Pour obtenir une image de l'involution engendrée sur F' par H', rapportons projectivement aux hyperplans d'un espace S_5 les quadriques

$$\lambda_{00}y_0^2 + \lambda_{01}y_0y_1 + \lambda_{11}y_1^2 + \lambda_{22}y_2^2 + \lambda_{23}y_2y_3 + \lambda_{33}y_3^2 = 0 \qquad (2)$$

en posant

$$\frac{x_{00}}{y_0^2} = \frac{x_{01}}{y_0y_1} = \frac{x_{11}}{y_1^2} = \frac{x_{22}}{y_2^2} = \frac{x_{23}}{y_2y_3} = \frac{x_{33}}{y_3^2} \qquad (3)$$

Observons que les polynomes φ_1, φ_2 deviennent des expressions linéaires respectivement A_1, A_2 des coordonnées x et que les polynomes φ^2, $\varphi\varphi'$ deviennent des polynomes du second degré B, B'.

Des équations (3) on déduit

$$x_{01}^2 - x_{00}x_{11} = 0, \qquad x_{23}^2 - x_{22}x_{33} = 0,$$

qui représentent deux cônes du second ordre Φ_1, Φ_2 le premier ayant pour sommet le plan $\sigma_1(x_{00} = x_{01} = x_{11} = 0)$ et le second le plan $\sigma_2(x_{22} = x_{23} = x_{33} = 0)$. Le premier rencontre le plan σ_2 suivant une conique Γ_2 et le second le plan σ_1 suivant une conique Γ_1. Le surface F'' image de l'involution I_2' de F' et I_4 de F appartient aux deux cônes Φ_1, Φ_2, c'est-à-dire à la variété V_3^4 lieu des droites s'appuyant sur les coniques Γ_1, Γ_2.

A l'équation de F' correspond l'équation

$$A_1^2A_2^2 + B(A_1^2 + A_2^2) = A_1A_2B'.$$

Celle-ci représente une variété V_4^4 qui coupe la variété V_3^4 suivant la surface F'', qui est donc du seizième ordre.

Observons que les hyperquadriques $B = 0$, $B' = 0$ contiennent les plans σ_1, σ_2. De plus, d'après la théorie des involutions, l'hyperquadrique $B = 0$ touche la variété V_3^4 suivant une surface du quatrième ordre.

La courbe canonique C'' de F'' correspond à la section de F par l'hyperplan $z_0 = 0$. Cette courbe canonique C de F appartient aux hypersurfaces

$$z_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad z_1z_2 = \varphi, \quad z_1^2 + z_2^2 = \varphi' \qquad (4)$$

Par conséquent, la courbe C'' appartient à l'espace à trois dimensions commun aux hyperplans $A_1 = 0$, $A_2 = 0$. Cet espace est d'ailleurs double pour la variété V_4^4.

5. Les courbes C, C'' correspondent toutes deux à la courbe canonique C' de F' donnée par $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Désignons par Γ la courbe commune aux hyperquadriques $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ dans l'espace (y). Dans S_6, le plan passant par un point y de Γ et par la droite $z_0 = 0$ du plan (z), contient quatre points de C, à savoir

$$\begin{array}{cccccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & z_1 & z_2 \\ y_0 & y_1 & -y_2 & -y_3 & -iz_1 & -iz_2 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & -z_1 & -z_2 \\ y_0 & y_1 & -y_2 & -y_3 & iz_1 & iz_2 \end{array}$$

Ces quatre points forment un groupe de I_4 et le premier et le troisième, le second et le quatrième, deux groupes de I_2. Observons que la courbe C, de genre 17, est en général irréductible, donc il doit en être de même de la courbe C'. Aux quatre groupes précédents correspondent deux points infiniment voisins de Γ. Il en résulte que la courbe C', d'ordre huit et de genre 9, est formée de deux branches infiniment voisines de Γ. Elle passe par les huit points triples de F'.

Observons que la courbe C appartient à l'hypersurface

$$\varphi(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \varphi_1\varphi_2\varphi',$$

équation qui représente dans l'espace (y) une surface passant par C'.

6. La courbe C'' doit être irréductible comme C et C'.

Appelons Γ' la courbe biquadratique section de la variété V_3^4 par l'espace à trois dimensions $A_1 = A_2 = 0$. Cette courbe correspond à Γ.

La courbe C'' est formée de deux branches infiniment voisines de Γ' ; elle passe par les quatre points de F'' qui correspondent aux points triples de F'. Cette courbe C'' est d'ordre huit et de genre cinq, elle est située sur la surface

$$B(A_1^2 + A_2^2) = A_1A_2B'.$$

On pourrait d'ailleurs déduire directement la surface F'' de la surface F. Interprétée dans l'espace S_6, l'équation (2) représente un des quatre systèmes appartenant à l'involution I_4, compris dans le système bicanonique de F. Comme cette équation ne peut contenir le terme z_0^2, le système des sections hyperplanes de F″ n'est pas le système bicanonique de cette surface.

6. Le système canonique de F comprend quatre systèmes appartenant à l'involution I_4. Un de ces systèmes comprend la courbe isolée C. Désignons par C_1 les courbes découpées par les hyperplans $z_1 + \lambda z_2 = 0$, par C_2 les courbes découpées par $y_0 + \lambda y_1 = 0$, par C_3 les courbes découpées par $y_2 + \lambda y_3 = 0$. Les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$, $|C_3|$ sont des faisceaux. On peut attacher à ces courbes respectivement les nombres $-i$, 1, -1, le nombre i étant attaché à C.

Dans le système bicanonique de F il existe quatre systèmes linéaires appartenant à l'involution I. Le premier comprend les courbes $C + C_1$, $2C_2$, $2C_3$, c'est le système correspondant au système des sections hyperplanes de F″. Le second comprend les courbes $2C$, $2C_1$, $C_2 + C_3$; il correspond au système bicanonique de F″. Le troisième comprend les courbes $C + C_2$, $C_1 + C_3$ et le quatrième, les courbes $C + C_3$, $C_1 + C_2$.

Les hyperplans de S_5 passant par $A_1 = A_2 = 0$, coupent encore la surface F″ suivant des courbes homologues des courbes C_1.

Liége, le 16 août 1967.