Géométrie algébrique. — **Sur des involutions appartenant à certaines surfaces régulières de genre $p^{(1)} = 1$,**

par Lucien GODEAUX, docteur en sciences physiques et mathématiques [1].

Supposons qu'entre deux surfaces algébriques Φ, F, qui ne soient ni rationnelles ni référables (par une transformation birationnelle) à des réglées, nous ayons une transformation rationnelle $(1, n)$ qui fasse correspondre, à un point de Φ, $n(>1)$ points de F et, inversement, à un point de F, un et un seul point de Φ. Les groupes de n points de F qui correspondent aux points de Φ forment une involution d'ordre n et de dimension deux, car un point de F appartient généralement à un et à un seul de ces groupes. Lorsque dans ce travail nous parlerons d'une involution existant sur une surface, il sera sous-entendu qu'il s'agit d'une involution de dimension deux. La surface Φ sera généralement désignée sous le nom de surface représentative de l'involution. Nous supposerons d'ailleurs Φ et F dépourvues de courbes exceptionnelles, ce qui, ces surfaces n'étant ni rationnelles ni réglées, ne nuit pas à la généralité.

Les premières recherches sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques sont celles faites par M. Painlevé à l'occasion de ses études, aujourd'hui classiques, sur les équations différentielles du premier ordre [2]. M. Painlevé a notamment démontré qu'entre deux surfaces algébriques de genres $p_g > 2$, $p^{(1)} > 1$, il ne peut exister qu'un nombre fini de correspondances rationnelles.

M. Enriques a établi, peu après, que si, sur une surface F, il

---

[1] Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), nº 12, pp. 1091-1108, 1913.

Présenté par M. Neuberg.

[2] Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. (*Annales de l'École normale,* 1891, [3], VIII; 1892, [3], IX [chap. II, § 9].)

existe une involution I_n, d'ordre n, la transformée d'une courbe canonique de la surface représentative de I_n, augmentée de la courbe de coïncidence de I_n, donne une courbe canonique de F (1).

M. Severi fit connaître plus tard les relations existant entre les genres arithmétique et linéaire d'une involution donnée sur une surface F (c'est-à-dire les genres de la surface représentative Φ) et ceux de F (2). Dans un autre ordre d'idées, M. Severi a encore établi que sur une surface irrégulière dépourvue de faisceau irrationnel de courbes il ne saurait exister une série continue d'involutions irrégulières (3), généralisant ainsi le théorème bien connu de MM. Humbert et Castelnuovo relatif aux courbes algébriques.

Par des méthodes d'une grande élégance, MM. Enriques et Severi sont parvenus, il y a quelques années, à donner une classification complète des involutions (ni rationnelles, ni référables à des réglées) existant sur une surface de Jacobi (4). A la même époque, par une voie différente, MM. Bagnera et De Franchis parvinrent au même résultat (5).

Profitant d'un théorème de M. Enriques sur les involutions de genres $p_a = P_4 = 1$ appartenant à une surface de mêmes genres (6), j'ai pu édifier récemment une classification complète

---

(1) Ricerche di geometria sulle superficie algebriche. (*Mem. della R. Accad. di Torino*, 1893, [2], XLIV.)

(2) Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica. (*Rend. R. Ist. Lomb.*, 1893, [2], XXXVI.)

(3) Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche. (*Annali di Matematica*, 1905, (3), XII.)

(4) Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques. (*Acta Mathematica*, 1909, XXXII, XXXIII.)

(5) Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti. (*Mem. della Soc. dei XL*, 1908, [3], XV.)

(6) Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno. (*Rend. R. Accad. di Bologna*, marzo 1910.)

de ces involutions (1). La méthode employée, qui se rapproche de celle de MM. Enriques et Severi, m'a également permis de classer les involutions de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ existant sur une surface de mêmes genres (2). Elle me permettrait également de retrouver les résultats de MM. Enriques et Severi sans profiter, comme l'ont fait ces géomètres, de la liaison d'une surface de Jacobi avec une courbe de genre deux (3).

Sur les conseils de M. Enriques, j'avais également entrepris des recherches sur les involutions de genres p_a, $p^{(1)}$ existant sur une surface de mêmes genres p_a, $p^{(1)}$. Je suis parvenu à démontrer que si les genres géométriques de la surface et de l'involution sont supérieurs à l'unité, et que si $p_a > 0$, l'involution est cyclique, on a $p^{(1)} = 1$ et les genres géométriques sont égaux (4). On peut remarquer que l'on démontrerait de la même manière qu'une involution d'ordre n et de genres $p'_a > 0$, $p'_g > 1$, $p^{(1)}$ existant sur une surface de genres $p_a > 0$, $p_g > 1$, $p^{(1)}$, est cyclique si l'on a

$$n(p'_a + 1) > p_a + 1.$$

---

(1) Sur les transformations rationnelles entre deux surfaces de genres un. (*Comptes rendus*, 1912, CLV.) — Sur les involutions de genres un existant sur une surface de genres un. (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* [Classe des sciences], 1913.) — Sur les involutions cycliques d'ordre 2d et de genres un sur une surface de genres un. (*Nachrichten der K. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen*, 1913.) — Classification des involutions de genres 1 appartenant à une surface de genres 1. (*Comptes rendus*, 1913, CLVI.) — Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un. (*Annales de l'École normale* [paraîtra en 1914].)

(2) Sur les involutions appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un. (*Comptes rendus*, 1913, CLVI.) — Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1913, XLI.) — Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. (*Bull. de la Section scient. de l'Acad. de Roumanie*, 1913, II.)

(3) Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences, appartenant à certaines surfaces algébriques. (*Mém. de la Soc. des sciences du Hainaut*, 1913.)

(4) Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces algébriques ayant mêmes genres arithmétique et linéaire. (*Atti della R. Accad. di Torino*, 1912, XLVIII.)

Dans ce travail, je vais m'occuper d'une question analogue. Je vais considérer des surfaces régulières de genre $p^{(1)} = 1$ pour lesquelles on a soit $p_g = 1$, $P_4 > 1$, soit $p_g = 0$, $P_2 > 1$, $P_6 > 1$. Sur ces surfaces, je considérerai des involutions d'ordre premier et dont les surfaces représentatives sont régulières et jouissent en outre de la propriété suivante : Sur une de ces surfaces, une courbe de genre π a le degré $2\pi - 2$. J'établirai simultanément les théorèmes suivants :

I. *Une involution d'ordre premier et de genres* $\mathrm{p}_a = \mathrm{P}_4 = 1$, *existant sur une surface de genres* $\mathrm{p}_a = \mathrm{p}_g = \mathrm{p}^{(1)} = 1$, $\mathrm{P}_4 > 1$, *est cyclique.*

II. *Une involution d'ordre premier et de genres* $\mathrm{p}_a = \mathrm{p}_g = 0$, $\mathrm{P}_6 = 1$ *existant sur une surface de genres* $\mathrm{p}_a = \mathrm{p}_g = \mathrm{p}^{(1)} = 1$, $\mathrm{P}_4 > 1$, *est cyclique.*

III. *Une involution d'ordre premier et de genres* $\mathrm{p}_a = \mathrm{p}_g = 0$, $\mathrm{P}_6 = 1$ *existant sur une surface de genres* $\mathrm{p}_a = \mathrm{p}_g = 0$, $\mathrm{p}^{(1)} = 1$, $\mathrm{P}_2 \geq 1$, $\mathrm{P}_6 > 1$, *est cyclique.*

Déjà en janvier dernier, j'avais établi un cas particulier du théorème I et j'avais exposé ma démonstration dans une petite note qui paraîtra incessamment dans les *Mathematische Annalen*. J'ai employé ici une autre méthode qui me semble préférable à plusieurs points de vue.

1. — Soient Φ, F deux surfaces algébriques qui ne sont ni rationnelles, ni référables birationnellement à des réglées, dépourvues de courbes exceptionnelles, régulières et dont le genre linéaire est $p^{(1)} = 1$.

Sur ces surfaces, nous ferons les hypothèses suivantes :

La surface F possède un faisceau linéaire $|C|$ de courbes elliptiques C (évidemment dépourvu de point-base).

La surface Φ est telle que toute courbe de genre π, tracée sur cette surface, a le degré $2\pi - 2$.

Entre les surfaces Φ, F, nous avons une correspondance rationnelle $(1, n)$, n étant un nombre premier. A un point de Φ correspondent donc n points de F et, inversement, à un point de F correspond un point de Φ. Les groupes de n points ainsi déterminés sur F forment une involution I_n.

La courbe de coïncidence D de l'involution I_n se compose de courbes *partielles* du faisceau $|C|$. Cette courbe D ne détermine donc pas un système linéaire infini, elle est isolée.

Sous ces conditions, nous allons démontrer que l'involution I_n est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe une transformation birationnelle T, de période n, engendrant I_n.

Considérons les groupes de I_n, dont un point appartient à une courbe C quelconque. Trois hypothèses peuvent être faites :

a) Les $n - 1$ points restants décrivent une courbe K, qui n'est pas réductible en un certain nombre de courbes C.

b) Les $n - 1$ points restants décrivent la courbe C elle-même.

c) Les $n - 1$ points restants sont situés sur des courbes de $|C|$, généralement différentes de la courbe C dont on est parti.

Nous examinerons successivement ces trois hypothèses.

2. — *Hypothèse a.* — Nous supposons donc que les $n - 1$ points qui, avec un point d'une courbe C, forment un groupe de I_n, engendrent une courbe K non réductible en un certain nombre de courbes C. Supposons de plus, en premier lieu, que la courbe K soit irréductible.

Les courbes K, associées aux différentes courbes C, forment un système continu ∞^1. Nous allons démontrer que le système continu complet $\{K\}$, qui comprend chaque courbe K comme courbe totale, est de dimension supérieure à l'unité.

Sur une courbe C générique, il n'y a aucun point de coïncidence de l'involution I_n. Par suite, si une courbe K a un point commun avec la courbe C, à laquelle elle correspond, elle en a certainement un deuxième, ces deux points faisant d'ailleurs partie d'un même groupe de I_n. Nous supposerons qu'une courbe C et la courbe K correspondante ont $\varepsilon \geq 1$ couples communs.

Une courbe C quelconque rencontre une courbe K également quelconque en 2ε points, car les courbes C découpent, sur la courbe K_1 correspondant à une courbe C_1, une série linéaire dont fait partie le groupe de points communs à C_1 et à K_1.

A une courbe C correspond, sur la surface Φ, une courbe elliptique Γ dotée de ε points doubles, correspondant aux ε couples de points communs à la courbe C et à la courbe K correspondante. Cette dernière aura d'ailleurs $(n - 2)\varepsilon$ points doubles (en des points variables).

Fixons l'attention sur une courbe C générique, soit C_1, et désignons par K_1 la courbe K correspondante, par Γ_1 la courbe Γ correspondante sur Φ.

Dans le système continu (non linéaire puisque $\varepsilon \geq 1$) $\{\Gamma\}$, la courbe Γ_2, infiniment voisine de Γ_1, découpe sur celle-ci un groupe caractéristique. Or, par hypothèse, la série caractéristique d'une courbe Γ est d'ordre zéro. D'autre part, puisqu'il y a 2ε points communs à une C et à une K quelconques, il y a 2ε points de C_1 dont un correspondant (par I_n) appartient à C_2 (courbe C correspondant à Γ_2). Les courbes Γ_1, Γ_2 ont donc 2ε points communs. Il faut, par conséquent, que la courbe Γ_2, infiniment voisine de Γ_1 dans $\{\Gamma\}$, passe simplement par les ε points doubles de Γ_1.

Soit K_2 la courbe K correspondant à C_2. K_2 est infiniment voisine de K_1 et découpe, sur cette courbe, un groupe caractéristique. Or, d'après ce que nous venons de voir, K_2 passera simplement par les $(n - 2)\varepsilon$ points doubles de K_1, et rencontrera encore cette dernière courbe aux 2ε points qu'elle a en commun avec C_1. Il faudra, d'ailleurs, que ε des points doubles de K_1 soient sur C_2.

Nous voyons donc que la série caractéristique de K_1 est d'ordre 2ε. Cette série est au moins simplement infinie, car le groupe caractéristique de K_1 que nous connaissons appartient à la série découpée sur K_1 par les courbes C.

Mais M. Enriques a démontré [1] que la série caractéristique d'un système continu, découpée par les courbes infiniment voisines d'une courbe du système sur celle-ci, est complète. Dans le système *complet* $\{K\}$, il y a au moins ∞^1 courbes infiniment voisines de K_1, donc $\{K\}$ est au moins doublement infini.

3. — Nous pouvons maintenant appliquer au cas actuel le raisonnement fait par MM. Enriques et Severi dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* [2].

Considérons une courbe K^* de $\{K\}$ qui ne soit pas la transformée d'une courbe C au moyen de la correspondance $(n-1, n-1)$ définie par I_n. Cette transformation fera correspondre à K^* une certaine courbe L que nous supposerons irréductible. Les groupes de I_n, dont un point est sur K^*, auront donc $n-1$ points sur L.

Faisons varier la courbe K^* dans $\{K\}$ de manière à ce qu'elle tende vers une courbe K_1 conjuguée d'une courbe C_1. Alors, la courbe L tend vers la courbe $(n-2)K_1+C_1$. Mais, comme MM. Enriques et Severi l'ont montré, cela n'est possible que si C_1 possède des points de coïncidence de l'involution I_n. Or, cela n'a pas lieu en général, donc la courbe L n'est pas irréductible.

La courbe L doit se décomposer nécessairement en deux parties C^*, L^* (cette dernière réductible ou non). Lorsque K^* tend vers K_1, C^* tend vers C_1 et L^* vers $(n-2)K_1$. Mais alors, C^*, tendant d'une manière continue vers une courbe C_1 de $|C|$, est également une courbe de ce faisceau, car ce dernier est évidemment complet (sans quoi F serait rationnelle). La courbe L^*+K^* sera alors la transformée d'une courbe C; cela est absurde, puisque K^* est une courbe totale de $\{K\}$ et qu'il devrait en être de même de K^*+L^*.

---

(1) Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari. (*Rend della R. Accad. di Bologna,* Dicem. 1904.)

(2) *Loc. cit.*, p. 335 (vol. XXXII).

Il faut donc que les courbes soient réductibles. Elles se réduisent d'ailleurs à $n-1$ courbes, car autrement on recommencerait le même raisonnement sur chaque partie de K sur laquelle se mouvraient plusieurs points d'un groupe de I_n, et l'on parviendrait de même à une absurdité.

De tout ceci il résulte que si l'hypothèse *a* peut se présenter, c'est-à-dire si les courbes K ne se réduisent pas à $n-1$ courbes C, il existe sur la surface F, outre $|C|$, $n-1$ faisceaux linéaires de courbes elliptiques $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{n-1}|$. Lorsqu'un point d'un groupe de I_n décrit une courbe C, les $n-1$ autres points décrivent respectivement une courbe de chacun de ces $n-1$ faisceaux. L'involution I_n est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe une transformation birationnelle T, de période n, de F en elle-même, engendrant I_n. On remarquera que les courbes des faisceaux $|C_1|$, $|C_2|$, ..., $|C_{n-1}|$ ne peuvent en général avoir des points de coïncidence de I_n, de sorte que la courbe D sera une *courbe fondamentale* de chacun de ces faisceaux.

Ainsi dans l'hypothèse *a*, l'involution I_n est cyclique. Nous ferons cependant voir, à la fin du travail, que cette hypothèse est inadmissible.

4. — *Hypothèse b*. — Supposons actuellement que lorsqu'un point d'un groupe de I_n se trouve sur une courbe C, tous les points du groupe se trouvent sur cette courbe C En répétant un raisonnement que nous avons déjà eu l'occasion de faire ailleurs [1], nous ferons voir que l'involution est cyclique.

Dans l'hypothèse actuelle, à une courbe C correspond, sur la surface Φ, une courbe elliptique Γ engendrant un faisceau $|\Gamma|$.

Considérons, dans l'espace à trois dimensions de coordonnées cartésiennes (x, y, z), un *modèle projectif* de Φ.

Soient

$$f(x, y, z) - \lambda\varphi(x, y, z) = 0, \qquad x - \lambda y = 0 \tag{1}$$

[1] Correspondances rationnelles entre surfaces de mêmes genres arithmétique et linéaire (*Loc. cit.*, § 2.)

les équations d'une courbe elliptique Γ ; λ est un paramètre variable et $f(xyz)$, $\varphi(xyz)$ sont des fonctions rationnelles et entières de x, y, z. L'équation de Φ est donc

$$x\varphi(xyz) - yf(xyz) = 0.$$

Soit $H(xyz)=0$ l'équation d'une surface algébrique d'ordre m, ayant avec la courbe (1), m contacts n — ponctuels. $H(xyz)$ est une fonction rationnelle et entière, irréductible, de x, y, z, dépendant d'ailleurs de λ.

Les équations

$$x - \lambda y = 0, \qquad f(xyz) - \lambda\varphi(xyz) = 0, \qquad u^n = H(x, y, z) \qquad (2)$$

représentent, dans l'espace (x, y, z, u), une courbe elliptique ayant une involution γ_n d'ordre n, représentable sur Γ.

A une valeur de λ correspondront plusieurs courbes telles que (3), et l'une de ces courbes sera la courbe C appartenant, par hypothèse, à une surface F dont nous supposons l'existence. Considérons les affixes de λ dans un plan réel R. Lorsque λ a décrit un contour fermé dans ce plan, les différentes courbes représentées par les équations (3) se sont généralement permutées entre elles. Cependant, celle que nous avons appelée C doit s'être reproduite, car autrement la surface F n'existerait pas. Le même fait doit d'ailleurs se produire pour une circulation quelconque de l'affixe de λ dans R.

L'existence de F revient donc à l'existence d'un polynôme $H(x, y, z)$ dépendant rationnellement de λ. Les équations de F seront alors

$$x\varphi(xyz) - yf(xyz) = 0, \qquad u^n = H\left(x, y, z, \frac{x}{y}\right).$$

A un point (x, y, z) de la surface Φ correspondront, sur F, les n points

$$(x, y, z, u), \quad (x, y, z, u\tau), \; \ldots\ldots \; (x, y, z, u\tau^{n-1}),$$

τ étant une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Ces groupes de n points engendreront, sur F, l'involution I_n répondant à l'hypothèse b. Cette involution est cyclique, elle est engendrée par la transformation de période n,

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad u' = \tau u.$$

5. — Plaçons-nous enfin dans l'hypothèse c. Les groupes de I_n dont un point parcourt une courbe C ont leurs autres points sur d'autres courbes C.

Il est évident que, n étant premier, il y aura n courbes C généralement distinctes, passant chacune par un point d'un groupe de I_n.

A une courbe C correspond sur Φ une courbe elliptique Γ engendrant un faisceau linéaire $|\Gamma|$.

Soient,

$$f(x, y, z), \qquad \varphi(x, y, z), \qquad F(xyz), \qquad \Phi(x, y, z)$$

étant des fonctions rationnelles et entières,

$$x - \lambda y = 0, \qquad f(xyz) - \lambda\varphi(xyz) = 0 \tag{1}$$

les équations d'une courbe Γ,

$$x - \mu y = 0, \qquad F(x, y, z) - \mu\Phi(xyz) = 0 \tag{2}$$

celles d'une courbe C.

L'équation de Φ s'obtiendra en éliminant λ entre les équations (1), celle de F en éliminant μ entre les équations (2).

Entre les faisceaux $|\Gamma|$, $|C|$, nous avons une correspondance $(1, n)$ qui sera représentée par une équation

$$\psi(\lambda, \mu) = 0, \tag{3}$$

$\psi(\lambda, \mu)$ étant une fonction rationnelle et entière, linéaire en λ, d'ordre n en μ.

Si μ_1 vérifie l'équation (3) et l'équation

$$\frac{d}{d\mu}\psi(\lambda, \mu) = 0,$$

la courbe C_1, définie par

$$x - \mu_1 y = 0, \qquad F(x, y, z) - \mu_1 \Phi(x, y, z) = 0,$$

sera une coïncidence. De pareilles courbes existent certainement.

Deux hypothèses peuvent être faites :

1° En chaque point de C_1, deux points d'un groupe de I_n coïncident. C_1 fait alors partie de la courbe de coïncidence D de I_n. Or, C_1 est une courbe totale de $|C|$ et, par hypothèse, D ne contient que des courbes partielles de ce faisceau. Cette première hypothèse nous conduit donc à une absurdité et doit être rejetée.

2° Sur C_1 se trouvent ∞^1 couples de points appartenant chacun à un même groupe de I_n. A un de ces couples correspond, sur Φ, un point double de la courbe Γ_1 (courbe Γ correspondant à C_1). Γ_1 a donc ∞^1 points doubles, c'est-à-dire que c'est une courbe dégénérée en deux parties superposées.

A Γ_1 correspondent, sur F, n — courbes de $|C|$, dont deux se confondent avec C_1. Soit C_2 une autre de ces n courbes.

De deux choses l'une :

Ou bien, sur C_2, on trouve ∞^1 couples de points, chacun appartenant à un groupe de I_n;

Ou bien chaque point de C_2 est double pour la courbe. C_2 dégénère en deux courbes superposées. Dans ce dernier cas, si nous désignons par P_1, P_2 deux points de C_1 appartenant à un même groupe de I_2, à P_1 correspondra un point P_1' d'une partie de C_2, à P_2 correspondra un point P_2' de l'autre partie de C_2, mais les points P_1', P_2' seront superposés. Il y aurait alors une coïncidence en chaque point de la courbe, C_2^*, C_2^* étant la courbe qui, comptée deux fois, forme la courbe C_2.

De toutes façons, on voit que la courbe C_2 compte pour deux dans les n courbes C correspondant à Γ_1.

Cela étant, on recommencera le même raisonnement avec une troisième courbe C et on verra qu'on doit aussi la compter deux fois, de même que C_1 et C_2. Et ainsi de suite. Or, nous pouvons supposer n impair, car n est premier et le cas $n=2$ ne présente pas d'intérêt. A Γ_1 correspondraient donc, d'après ce qu'on vient de voir, un certain nombre k de courbes à compter chacune deux fois. On ne peut avoir $2k = n$, donc l'hypothèse c est à rejeter.

De toutes manières, nous voyons que *l'involution* I_n *est cyclique*.

6. — Nous déterminerons actuellement les surfaces Φ, F par les valeurs de leurs genres et plurigenres.

La surface Φ est régulière et une courbe de genre π, tracée sur cette surface, a le degré $2\pi-2$. On sait alors (¹) que la surface Φ est de l'un des deux types suivants :

a) Surface de genres un, caractérisée par les conditions $p_a = P_4 = 1$. Les courbes canoniques et pluricanoniques de cette surface existent et sont d'ordre zéro. On a $p^{(1)} = 1$, $p_g = P_2 = \ldots = P_i = 1$.

b) Surface de genres zéro et de bigenre un, caractérisée par les conditions $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. On a $p_g = P_3 = \ldots = P_{2i+1} = 0$, $P_2 = P_4 = \ldots = P_{2i} = 1$, $p^{(1)} = 1$. La surface est dépourvue de courbe $(2i+1)$-canonique et possède une courbe $2i$-canonique d'ordre zéro. Cette surface a été étudiée d'une manière fort complète par M. Enriques (²).

La surface F répond aux conditions suivantes :

Elle est régulière ;

Son genre linéaire est égal à l'unité : $p^{(1)} = 1$;

Elle possède un faisceau linéaire $|C|$ de courbes elliptiques ;

La courbe de coïncidence D de I_n se compose de courbes partielles de $|C|$.

(¹) Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini, etc. (*Loc. cit.* [chap. I].)

(²) Sopra le superficie algebriche di bigenere uno. (*Memorie della Società dei XL*, 1907, [3], XIV.)

Rappelons que lorsqu'il existe, entre deux surfaces Φ, F, une correspondance rationnelle, M. Enriques [1] a établi que :

1° Le genre géométrique, les plurigenres et l'irrégularité de F sont respectivement supérieurs ou égaux au genre géométrique, aux plurigenres et à l'irrégularité de Φ ;

2° La transformée, sur F, d'une courbe i-canonique de Φ, augmentée de i fois la courbe D, donne une courbe i-canonique de F.

Supposons, en premier lieu, que Φ soit de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Les genres p_g, P_2, ... de F sont tous supérieurs ou égaux à l'unité. On a de plus, par hypothèse, $p_a = p_g$.

La transformée de la courbe canonique de Φ est, comme cette courbe, d'ordre zéro. Par suite, la courbe D est une courbe canonique de F. Mais, par hypothèse, D est une courbe isolée, donc le genre géométrique de F est $p_g = 1$.

M. Enriques a démontré qu'une surface de genre $p_g = 1$ et dont le quadrigenre est $P_4 = 1$ possède une courbe canonique d'ordre zéro [2]. Or, la courbe canonique de F, c'est-à-dire D, n'est pas d'ordre nul, donc on a $P_4 > 1$.

Le système quadricanonique de F, qui est $|4D|$, est donc au moins ∞^1. D'autre part, on a $p^{(1)} = 1$, donc les courbes 4D sont composées au moyen de courbes elliptiques d'un faisceau nécessairement linéaire, puisque $p_a = p_g$. Ce faisceau ne peut être que $|C|$, car les courbes 4D ne peuvent rencontrer les C. Il y aura donc quelques parties de D, soient $L_1, L_2, \ldots, L_k$, telles que

$$\lambda_1 L_1 \equiv \lambda_2 L_2 \equiv \cdots \equiv \lambda_k L_k \equiv C,$$

les $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ étant égaux à deux, trois ou quatre.

Supposons maintenant que Φ soit une surface de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$). Les genres et plurigenres de F satisfont aux relations $p_g \geq 0$, $p_a = p_g$, $P_2 \geq 1$, $P_3 \geq 0$, $P_4 \geq 1, \ldots$, $P_{2i} \geq 1$, $P_{2i+1} \geq 0, \ldots$.

---

(1) Ricerche di geometria, etc. (*Loc. cit.*)

(2) Intorno alle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 1$. (*Rend. della R. Accad. di Bologna*, Dicemb. 1906.)

Soit, sur Φ, $|A|$ un système linéaire, $|A'|$ son adjoint. Le système $|A' - A|$ n'existe pas. Si A^*, A'^* sont les transformées des courbes A, A' sur F, $|A'^* - A^*|$ n'existe pas, mais le système $|A'^* - A^* + D|$ peut exister. C'est alors le système canonique de F. D étant isolée, ce système canonique, s'il existe, sera ∞^0. Nous sommes donc conduit à faire deux hypothèses :

1° Le système $|A'^* - A^* + D|$ n'existe pas et le genre géométrique de F est donc $p_g = 0$;

2° Le système $|A'^* - A^* + D|$ existe et on a $p_g = 1$ pour F. Cette dernière hypothèse conduit, en répétant le raisonnement fait tantôt, aux conditions $p^{(1)} = p_a = p_g = 1$, $P_4 > 1$ pour déterminer F.

Plaçons-nous donc dans la première hypothèse. Le système $|2A' - 2A|$ et par suite $|2A'^* - 2A^*|$ est d'ordre zéro. Par suite, la courbe 2D est une courbe bicanonique de F.

La courbe 2D peut être isolée ou non. Si elle est isolée, la surface F a son bigenre $P_2 = 1$ et, puisque sa courbe bicanonique est d'ordre supérieur à zéro, son sextigenre est $P_6 > 1$ [1]. Si la courbe 2D n'est pas isolée, on a $P_2 > 1$ et, à fortiori, $P_6 > 1$. Dans tous les cas, le système sexticanonique $|6D|$ existe et est au moins ∞^1.

On a, pour F, $p^{(1)} = 1$ (par hypothèse); le système $|6D|$ est donc composé avec un faisceau de courbes elliptiques. Ce faisceau ne peut être que $|C|$, car les courbes 6D ne peuvent rencontrer les C.

En résumé, nous voyons que la surface F est caractérisée, soit par les conditions $p^{(1)} = p_a = p_g = 1$, $P_4 > 1$, soit par les conditions $p^{(1)} = 1$, $p_a = p_g = 0$, $P_6 > 1$ $(P_2 > 1)$.

Si F est caractérisée par $p^{(1)} = p_a = p_g = 1$, $P_4 > 1$, Φ est caractérisée par $p_a = P_4 = 1$ ou par $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$.

Si F est caractérisée par $p^{(1)} = 1$, $p_a = p_g = 0$, $P_6 > 1$, Φ est caractérisée par $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$.

---

(1) Enriques, Superficie di bigenere uno. (*Loc. cit.*)

7. — Nous avons démontré que l'involution I_n est toujours cyclique, c'est-à-dire qu'il existe une transformation birationnelle T, de F en elle-même, de période n, engendrant l'involution. Il nous reste à faire une dernière remarque.

Retournons aux trois hypothèses faites au début de ce travail. Nous avons vu que l'hypothèse c doit être rejetée. Dans l'hypothèse a, la transformation T et ses puissances successives transforment $|C|$ en des faisceaux $|C_1|, \ldots, |C_{n-1}|$ qui tous admettent la courbe D comme courbe fondamentale.

Considérons, par exemple, le système sexticanonique $|6D|$ de la surface F. Ce système est, quelle que soit F, au moins ∞^1, puisqu'on a toujours $P_6 > 1$.

Une courbe 6D, qui est composée de quelques courbes C, est transformée par T en une courbe sexticanonique (distincte ou non de la première). Or celle-ci sera, d'une part, composée de courbes C, d'autre part, composée de courbes C_1. Il faut donc que $|C|$ et $|C_1|$ coïncident.

En continuant de même, on démontrerait que les n faisceaux $|C|, |C_1|, \ldots, |C_{n-1}|$ doivent coïncider. Cela infirme l'hypothèse a.

L'hypothèse b subsiste donc seule, c'est-à-dire que :

La transformation T *change une courbe* C *en elle-même.*

On remarquera l'analogie de ce résultat avec celui que nous avions obtenu en considérant les correspondances rationnelles entre deux surfaces de mêmes genres linéaire et arithmétique.

Liége, le 20 septembre 1913.