O powierzchni czwartego rzędu, zawierającej krzywą skośną rzędu szóstego, rodzaju trzeciego. — Sur la surface du quatrième ordre contenant une sextique gauche de genre trois.

Mémoire

de M. ***LUCIEN GODEAUX,***

présenté, dans la séance du 5 Novembre 1913, par M. K. Żorawski m. c.

Les recherches de M. Severi sur les courbes tracées sur une surface algébrique ont conduit ce Géomètre à un résultat très intéressant sur les surfaces régulières admettant un groupe discontinu de transformations birationnelles en elles-mêmes [1]). D'une manière plus précise, M. Severi a démontré que:

Si une surface régulière F possède un groupe infini discontinu de transformations birationnelles en elle-même, ce groupe est isomorphe à un groupe de substitutions à coefficients entiers, de modules ± 1, de la forme quadratique fondamentale de F en elle-même.

M. Severi a utilisé ce théorème pour déterminer d'une manière complète le groupe des transformations birationnelles en elle-même d'une surface du quatrième ordre assujettie à la seule condition de contenir une sextique gauche de genre deux. De pareils exemples peuvent évidemment être multipliés à l'infini, cependant nous con-

[1]) Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica. Math. Annalen, 1906, Bd. LXII. — La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique. Annales de l'Ec. Normale, 1908, (3), XXV. — Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica, Rend. di Palermo, 1910, XXX.

sacrerons cette note à un de ces exemples. Nous considérerons précisément une surface du quatrième ordre assujettie à la seule condition de contenir une sextique de genre trois. Une pareille surface admet une infinité de transformations birationnelles involutives en elle-même, engendrant chacune une involution de genres $p_a = P_4 = 1$ et dotée par conséquent de huit points de coïncidence. Le produit de deux de ces transformations est une transformation non périodique. C'est, croyons-nous, le premier exemple connu de surface de genres $p_a = P_4 = 1$ admettant des involutions de genres $p_a = P_4 = 1$. C'est ce qui nous a engagé à publier nos résultats.

1. — Soit F une surface du quatrième ordre assujettie à la seule condition de contenir une sextique gauche de genre trois.

Les surfaces du quatrième ordre découpent, sur une sextique gauche de genre trois, une série linéaire g_{24}^{21} d'ordre 24 et de rang 21. Par suite, il y a ∞^{12} surfaces du quatrième ordre contenant une sextique de genre trois déterminée. Mais il y a ∞^{24} sextiques gauches de genre trois (Halphen) et, sur une surface du quatrième ordre déterminée, il y a ∞^3 de ces sextiques, donc il y a $\infty^{12+24-3} = \infty^{33}$ surfaces du quatrième ordre contenant une sextique de genre trois. Par conséquent,

La surface F dépend de dix-huit modules,

car le nombre des modules d'une surface du quatrième ordre est égal à dix-neuf [1]). On en déduit que

Le nombre-base de F est $\varrho = 2$.

2. — Désignons par $|C_1|$ le système des sections planes de F, par $|C_2|$ le système des sextiques de genre trois (∞^3).

Les courbes C_1, C_2 forment une base, car on a

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -20.$$

[1]) Enriques. Le superficie di genere 1. Rend. R. Accad. Bologna, 1908—1909. — Severi. Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero. Att. R. Ist. Veneto, 1908—1909.

Nous montrerons que c'est précisément une base minima. Il suffira de prouver que c'est une base intermédiaire, car, pour une surface du quatrième ordre, on a $\sigma = 1$ (Severi, La base minima...).

Supposons que Γ_1, Γ_2 forment une base minima de F. Désignons par ν_{11}, ν_{22} respectivement les degrés virtuels de Γ_1, Γ_2, par ν_{12} le nombre de points communs à ces deux courbes. D'après M. Severi, le déterminant de cette base,

$$\Delta = \nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}^2,$$

doit diviser -20. On a donc $\Delta = -1$, ou $\Delta = -2$, ou $\Delta = -4$ ou $\Delta = -5$, ou $\Delta = -10$.

D'après une observation faite par M. Severi (Complementi, no. 7), si la surface F contenait des courbes elliptiques (sans points doubles), les déterminants de toutes ses bases seraient, en valeur absolue, des carrés parfaits. Actuellement, le déterminant de la base (C_1, C_2) n'est pas carré parfait, donc F ne contient pas de courbes elliptiques (sans points doubles) et les valeurs $\Delta = -1$, $\Delta = -4$ ne peuvent convenir.

Les valeurs $\Delta = -2$, $\Delta = -10$ se rejettent immédiatement. ν_{11} et ν_{22} sont pairs, car un système linéaire de genre π, tracé sur F, a le degré $2\pi - 2$ (et la dimension π). Si $\Delta = -2$ ou si $\Delta = -10$, ν_{12} est également pair et par suite Δ est multiple de quatre, ce qui est absurde.

Pour montrer que Δ ne peut être égal à -5, nous suivrons un procédé employé par M. Severi (La base minima...) pour construire une base intermédiaire.

Remarquons que les systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ satisfont aux conditions suivantes:

1°) L'ordre de leurs courbes est supérieur à celui des courbes canoniques de F (car celles-ci sont d'ordre zéro).

2°) Leur dimension virtuelle (actuellement égale à la dimension effective trois) est positive.

3°) Leurs multiples d'ordre suffisament élevé renferment (partiellement) tout système donné.

Cela étant, soit C une courbe donnée par

$$\lambda C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,$$

λ ne divisant pas λ_1 ($\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ entiers).

Si μ et μ_1 sont des entiers tels que

$$\lambda\mu + \lambda_1 \mu_1 = \theta,$$

θ étant le plus grand commun diviseur de λ, λ_1, prenons

$$\Gamma_1 \equiv \mu C_1 + \mu_1 C + kC_2, \ \Gamma_2 \equiv C_2,$$

k étant un entier positif ou nul tel que

a) le degré virtuel de $|\Gamma_1|$ soit supérieur à zéro, et que

b) l'ordre d'une courbe Γ_1 ne soit pas négatif.

Sous ces conditions, $|\Gamma_1|$ existe effectivement.

Γ_1 et Γ_2 forment une base dont le déterminant Δ vérifie la relation

$$\lambda^2 \Delta = - 20\, \theta^2.$$

Actuellement, Δ a nécessairement la valeur $\Delta = -5$, donc $\lambda^2 = 4\theta^2$, c'est-à-dire $\lambda = \pm 2\theta$.

L'entier $\frac{\lambda_1}{\theta}$ est certainement impair, sans quoi θ ne serait pas le plus grand commun diviseur de λ et λ_1. Posons donc $\lambda_1 = (2\varepsilon + 1)\,\theta$, ε étant un entier.

Nous aurons donc

$$\pm 2\mu + (2\varepsilon + 1)\, \mu_1 = 1,$$

d'où, t étant un entier,

$$\mu = (2\varepsilon + 1)\, t \mp \varepsilon, \ \mu_1 = \mp 2t + 1.$$

Nous prendrons $t = 0$, d'où $\mu = \mp \varepsilon$, $\mu_1 = 1$,

$$\Gamma_1 \equiv \mp \varepsilon C_1 + C + kC_2.$$

Le degré virtuel de C est égal à

$$(2\varepsilon + 1)^2 + 3\,(2\varepsilon + 1)\, \frac{\lambda_2}{\theta} + \frac{\lambda_2^2}{\theta^2}.$$

λ_2 est donc divisible par θ. Posons $\lambda_2 = \theta\eta$, de sorte que le degré de C est égal à

$$(2\varepsilon+1)^2 + 3(2\varepsilon+1)\,\eta + \eta^2.$$

Le degré virtuel d'un système linéaire de courbes tracées sur F étant pair, η doit être impair.

Nous exprimerons ν_{11} et ν_{12} en fonction de ε, η et k, puis nous verrons que l'expression

$$\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}^2 = -5$$

exige que η soit pair. La contradiction nous conduit à rejeter l'hypothèse $\Delta = -5$.

On trouve, par un calcul simple,

$$\nu_{11} = (4\varepsilon+1)^2 + \eta^2 + 2\eta\,(5\varepsilon+1) + 4k^2 \mp 6k\,(5\varepsilon+1) \mp 4\,\eta k,$$
$$\nu_{12} = \mp 3\,(4\varepsilon+1) \mp 2\eta + 4k.$$

(Ainsi que nous l'avons déjà dit, k sera choisi de manière à rendre ces expressions positives).

L'expression

$$\nu_{11}\nu_{22} - \nu_{12}^2 = -5$$

devient

$$10\,(2\varepsilon+1) + \eta\,(2\varepsilon+1) - 6k\,\varepsilon = 0,$$

η doit donc être pair, ce qui est impossible.

La plus petite valeur absolue du déterminant d'une base de la surface F est donc 20, et par conséquent

Les courbes C_1, C_2 forment une base minima de la surface F.

3. — Courbes tracées sur la surface F. — Toute courbe C, algébrique, tracée sur F, vérifie la relation fonctionnelle

$$C \equiv \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2,$$

λ_1 et λ_2 étant des entiers. De cette relation on déduit, en désignant par π le genre de C,

$$(1) \qquad 2\pi - 2 = 4(\lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2).$$

On en déduit que le genre d'une courbe tracée sur F est de la forme $\pi = 2\zeta + 1$, ζ étant un entier positif non nul, car nous avons vu que la surface F ne peut contenir des courbes elliptiques (sans points doubles).

La formule (1) s'écrit

$$(2) \qquad \zeta = \lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2.$$

La substitution

$$\lambda_1 = \frac{t - 3u}{2}, \quad \lambda_2 = u$$

change l'équation (2) en

$$(3) \qquad t^2 - 5u^2 = 4\zeta.$$

A tout système de valeurs entières de t, u satisfaisant à l'équation (3) correspond une courbe virtuelle C de genre $2\zeta + 1$. Pour que cette courbe soit effective, il faut et il suffit que (Severi, Complementi..., § 3, no. 7):

1°) son degré virtuel $2\pi - 2 = 4\zeta$ soit positif ou nul.

2°) son ordre soit positif.

La première condition est satisfaite, puisque l'on a $\zeta > 1$. La deuxième se traduit par l'inégalité

$$4\lambda_1 + 6\lambda_2 > 0,$$

c'est-à-dire par $t > 0$. Par conséquent:

Si t, u sont deux entiers dont le premier est positif satisfaisant à la relation

$$t^2 - 5u^2 = 4\zeta,$$

ζ étant un entier positif non nul, il existe sur la surface F une courbe effective

$$\tfrac{1}{2}(t-3u)\,C_1+u\,C_2,$$

de genre $2\zeta+1$. Réciproquement, toute courbe tracée sur la surface F s'obtient de cette manière.

En particulier:

La surface F ne possède pas de faisceaux de courbes elliptiques ni de réseaux de courbes de genre deux.

Mais la surface F possède une infinité de systèmes linéaires de genre trois:

$$|C_1|,\ |C_2|,\ |3C_1-C_2|,\ |-C_1+3C_2|,\ |8C_1-3C_2|,\ |-3C_1+8C_2|,$$
$$|21C_1-8C_2|,\ |-8C_1+21C_2|,\ldots$$

4. — Substitutions automorphes de la forme

$$\lambda_1^2+3\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2.$$

D'après le théorème de M. Severi rappelé au début, à une transformation birationnelle de F en elle-même correspond une substitution unimodulaire de la forme

$$f(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1^2+3\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2$$

en elle-même. Si la surface F possède une transformation birationnelle T_1, non cyclique, en elle-même, il correspond donc à cette transformation une substitution automorphe

$$\theta_1=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

de $f(\lambda_1\lambda_2)$. On doit avoir

$$\alpha\delta-\beta\gamma=+1,$$

car les substitutions de module -1 sont involutives. Il est bien connu que α, β, γ, δ sont donnés par les formules

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(t + 3u), \ \beta = u, \ \gamma = -u, \ \delta = \tfrac{1}{2}(t - 3u),$$

t et u étant les entiers satisfaisant à l'équation

$$t^2 - 5u^2 = 4.$$

De plus, toutes les substitutions θ_1 s'obtiennent en prenant les puissances successives de celle d'entre elles qui correspond à la plus petite valeur positive non nulle de u. Actuellement, cette valeur est $u = 1$; on a alors $t = 3$ et

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$\theta_1^i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^i. \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

On a donc

$$\alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1.$$

En calculant θ_1^{i+1}, on trouve

$$\alpha_{i+1} = 3\alpha_i - \beta_i, \ \beta_{i+1} = \alpha_i, \ \gamma_{i+1} = 3\gamma_i - \delta_i, \ \delta_{i+1} = \gamma_i.$$

Remarquons que l'on a, d'après ce que nous avons vu plus haut,

$$\beta_i + \gamma_i = u + (-u) = 0.$$

Par suite, on a

$$\theta_1^i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_{i-1} \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_{i-2} \end{pmatrix},$$

les quantités α_i satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$\alpha_i = 3\,\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2},$$

$(\alpha_1 = 3,\ \alpha_0 = 1,\ \alpha_{-1} = 0)$.

Soit maintenant

$$\theta_{2k} = \begin{pmatrix} \alpha'_k & \beta'_k \\ \gamma'_k & \delta'_k \end{pmatrix}$$

une substitution automorphe de $f(\lambda_1, \lambda_2)$ pour laquelle

$$\alpha'_k \delta'_k - \beta'_k \gamma'_k = -1.$$

On posera en particulier

$$\theta_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le produit $\theta_{2k}\,\theta_{20}$ est certainement une substitution automorphe de module $+1$ de $f(\lambda_1, \lambda_2)$. Ce sera donc une certaine puissance de θ_1. Posons donc

$$\theta_{2i}\,\theta_{20} = \theta_1^i,$$

ou, puisque $\theta_{20}^2 \equiv 1$,

$$\theta_{2i} = \theta_1^i\,\theta_{20}.$$

On trouve

$$\theta_{2i} = \begin{pmatrix} \alpha_{i-1} & \alpha_i \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} \end{pmatrix}.$$

En résumé:

Le groupe des substitutions automorphes de la forme

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1^2 + 3\,\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2^2$$

est engendré par les substitutions

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \theta_{20} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont la première n'est pas cyclique et la deuxième est involutive. Une substitution non cyclique a la forme

$$\theta_1^i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \alpha_{i-1} \\ -\alpha_{i-1} & -\alpha_{i-2} \end{pmatrix},$$

et une substitution involutive a la forme

$$\theta_{2i} = \begin{pmatrix} \alpha_{i-1} & \alpha_i \\ -\alpha_{i-2} & -\alpha_{i-1} \end{pmatrix},$$

les quantités α satisfaisant à la relation fonctionnelle

$$\alpha_i = 3\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2},$$

$(\alpha_1 = 3,\ \alpha_0 = 1,\ \alpha_{-1} = 0)$.

On remarquera que la relation

$$-\alpha_i\alpha_{i-2} + \alpha_{i-1}^2 = 1,$$

qui exprime que θ_1^i est unimodulaire, se déduit de

$$-\alpha_{i-1}\alpha_{i-3} + \alpha_{i-2}^2 = 1,$$

par la relation

$$\alpha_i = 3\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2}.$$

En particulier, on a

$$-\alpha_1\alpha_{-1} + \alpha_0^2 = 1.$$

5. — Transformations involutives de F. — Supposons qu'il existe une transformation birationnelle involutive T_2 de F en elle-même.

Cette transformation T_2 change C_1 en une courbe Γ_1, C_2 en Γ_2. Ecrivons

$$\Gamma_1 \equiv \alpha C_1 + \gamma C_2,$$
$$\Gamma_2 \equiv \beta C_1 + \delta C_2.$$

Nous avons de même, puisque $T_2^2 = 1$,

$$C_1 = \alpha \Gamma_1 + \gamma \Gamma_2,$$
$$C_2 \equiv \beta \Gamma_1 + \delta \Gamma_2.$$

A T_2 correspond une substitution unimodulaire

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

de $f(\lambda_1, \lambda_2)$. On a donc

(1) $$\alpha\delta - \beta\gamma = -1, \quad \alpha + \delta = 0.$$

Soit D une courbe invariante pour T_2:

$$D \equiv \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2.$$

μ_1 et μ_2 sont deux entiers qui peuvent être choisis premiers entre eux. En effet, si l'on avait $\mu_1 = k\mu_1'$, $\mu_2 = k\mu_2'$, à cause de l'univocité de la division sur F ($\sigma = 1$, Severi, La base minima...), la courbe

$$\frac{D}{k} \equiv \mu_1' C_1 + \mu_2' C_2$$

serait aussi invariante pour T_2 et il nous suffirait de considérer cette courbe, k étant le plus grand commun diviseur de μ_1, μ_2. Nous supposons donc μ_1, μ_2 premiers entre eux.

La courbe D a également pour expressions:

$$D \equiv \mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 F_2,$$
$$D \equiv (\alpha\mu_1 + \beta\mu_2)\, C_1 + (\gamma\mu_1 + \delta\mu_2)\, C_2.$$

Les courbes C_1, C_2 étant indépendantes, on a

(2) $$\mu_1 = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2,$$

(3) $$\mu_2 = \gamma\mu_1 + \delta\mu_2.$$

De plus, Γ_1 étant de genre trois comme C_1, on a

$$\alpha^2 + 3\alpha\gamma + \gamma^2 = 1. \tag{4}$$

De ces cinq relations, nous déduirons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en fonction de μ_1, μ_2.

Supposons tout d'abord $\gamma = 0$. Alors on a $\alpha > 0$, car autrement la courbe Γ_1 n'existerait pas. De (1), on déduit $\alpha = 1$, $\delta = -1$. On a $\beta > 0$, car autrement la courbe $\Gamma_2 \equiv \beta C_1 - C_2$ ne serait pas effective. Par suite, on déduit de (2) $\mu_2 = 0$. On en conclut

$$D \equiv \mu_1 C_1 .$$

Deux cas peuvent se présenter:

a) Une courbe C_1 est transformée par T_2 en une courbe C_1 en général différente. On a $\mu_1 = 2$, $D \equiv 2C_1$. Mais alors F serait invariante pour une homographie involutive et, d'après un théorème de M. Severi (Complementi ..., no. 12, b) elle dépendrait au plus de 11 modules. Cela est impossible, puisque F dépend exactement de 18 modules.

b) Une courbe C_1 est transformée en elle-même par T_2. On a $\mu_1 = 1$, $D \equiv C_1$. M. Severi a démontré (Complementi ..., no. 12, c) qu'alors F devrait nécessairement posséder des faisceaux de courbes elliptiques, ce qui est impossible.

On ne peut donc avoir $\gamma = 0$. Les relations (1), (2), (3) et (4) donnent alors

$$\alpha = -\delta = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1^2 + 3\mu_1\mu_2 + \mu_2^2},$$

$$\beta = \frac{\mu_1(3\mu_1 + 2\mu_2)}{\mu_1^2 + 3\mu_1\mu_2 + \mu_2^2},$$

$$\gamma = \frac{\mu_2(2\mu_1 + 3\mu_2)}{\mu_1^2 + 3\mu_1\mu_2 + \mu_2^2}.$$

Posons

$$\mu = \mu_1^2 + 3\mu_1\mu_2 + \mu_2^2 .$$

μ_1 et μ_2 étant premiers entre eux sont aussi premiers avec μ. Par suite, β et γ étant entiers, μ divise

$$3\mu_1 + 2\mu_2 \text{ et } 2\mu_1 + 3\mu_2;$$

il divise encore

$$3(3\mu_1 + 2\mu_2) - 2(2\mu_1 + 3\mu_2) = 5\mu_1$$

et par suite 5. On a donc $\mu = 1$ ou $\mu = 5$.

Si μ était égal à un, la courbe D serait de genre trois. Ainsi que nous l'avons rappelé plus haut, cela entraînerait l'existence sur F de faisceaux de courbes elliptiques. On a donc nécessairement $\mu = 5$ et les courbes D sont de genre 11.

Une transformation involutive laisse invariantes des courbes de genre onze.

6. — Détermination de toutes les courbes invariantes pour une transformation involutive. — Désignons par I_2 l'involution engendrée par la transformation T_2, c'est-à-dire que chaque groupe de I_2 est formé des points se correspondant au moyen de T_2. On sait que I_2 peut être rationnelle, de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_2 = P_6 = 1$) ou de genres un ($p_a = P_4 = 1$).

Si I_2 est rationnelle, il existe sur F un réseau de courbes de genre deux. Nous avons vu que cela est impossible, donc I_2 n'est pas rationnelle.

Si I_2 est de bigenre un, comme le nombre-base d'une surface de bigenre un est au moins égal à 10, celui de F serait aussi égal à 10 au minimum. Or, nous savons qu'il est égal à deux.

L'involution I_2 est donc nécessairement de genres un. Nous construirons une surface Φ représentative de cette involution.

Considérons le système linéaire

$$|A_1| = \left| \frac{4\mu_1 + \mu_2}{5} C_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{5} C_2 \right|.$$

Il est de genre trois, car, à cause de

$$f(\mu_1, \mu_2) = 5,$$

on a

$$f\left(\frac{4\mu_1+\mu_2}{5}, \frac{\mu_2-\mu_1}{5}\right)=1.$$

La transformation T_2 fait correspondre au système $|A_1|$ le système

$$|A_2| = \left|\frac{\mu_1-\mu_2}{5} C_1 + \frac{\mu_1+4\mu_2}{5}\right| C_2.$$

De plus, on a

$$|A_1+A_2| = |D|.$$

Observons que:

a) Les systèmes linéaires complets de courbes appartenant à une surface de genres un (en particulier à F et à Φ) sont dépourvus de points-bases.

b) Le système $|A_1|$, de genre trois et de degré quatre, est simple. En effet, s'il était composé, ce ne pourrait être qu'avec une involution d'ordre deux; mais d'après un théorème (déjà rappelé plusieurs fois) dû à M. Severi, cela entraînerait la présence sur F de faisceaux de courbes elliptiques, ce qui est impossible.

c) Le système $|A_2|$ est simple.

d) Le système $|D|$ est simple. En effet: 1°) Il ne peut être composé avec I_2, car alors à $|D|$ correspondrait sur Φ un système linéaire complet de degré $\frac{1}{2}(2.11-2)=10$ et de dimension 11, ce qui est impossible puisque Φ est de genre un. 2°) Si $|D|$ était composé avec une involution I_2 d'ordre r, celle-ci serait changée en elle-même par T_2 et $|A_1|$, $|A_2|$ seraient donc composés avec I_r, ce qui est impossible.

e) L'involution I_2 possède huit points unis [1]).

Ces remarques faites, désignons par B la courbe de genre trois qui correspond sur Φ à une courbe A_1. A B correspond sur F une courbe A_2. Les courbes A_1, A_2 ont six points communs, c'est-à-dire qu'elles ont trois couples de I_2 en commun. A ces couples corres-

[1]) Voir par exemple ma note: Sur les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un. Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1913.

pondent, sur Φ, trois points doubles pour B. Celle-ci est donc de genre virtuel six et engendre un système linéaire $|B|$ de degré 10 et de dimension six. A une courbe de ce système correspond une courbe invariante D.

Le système $|B|$ est dépourvu de points-bases (observation a) et de plus il est simple, car s'il était composé, il en serait de même de $|A_1|$, ce qui est impossible. Rapportons projectivement les courbes de $|B|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à six dimensions. A Φ correspond une surface normale Φ_{10}, d'ordre dix, dont les sections hyperplanes (que nous désignerons toujours par B) sont de genre six. Cette surface possède huit points doubles coniques qui sont des points de diramation pour la correspondance (1, 2) la liant à F.

Rapportons projectivement les D aux hyperplans d'un S_{11}. F se transforme en un surface normale F_{20} d'ordre 20, dont les sections hyperplanes D ont le genre 11. A T_2 correspond une homographie involutive de S_{11} laissant F_{20} invariante. Cette homographie possède deux espaces linéaires unis S_k, S_{10-k}. L'un d'eux, S_k, ne rencontre pas F_{20}, l'autre la rencontre en 8 points (points de coïncidence pour I_2). Aux sections de F_{20} par les hyperplans passant par S_k correspondent les courbes B. On a donc $k=4$. Par conséquent:

Une transformation involutive de F laisse invariantes les courbes de genre onze de deux systèmes incomplets appartenant à un même système linéaire. L'un a la dimension six, l'autre la dimension quatre et possède huit points-bases qui sont chacun invariants pour la transformation.

Le autres courbes invariantes pour T_2 sont des courbes

$$|\nu D| = |\nu\mu_1 C_1 + \nu\mu_2 C_2|.$$

A ces courbes correspondent, sur Φ_{10}, des courbes νB ou

$$\nu B - B_1 - \ldots - B_8;$$

$B_1, B_2, \ldots, B_8$ étant les points doubles de Φ_{10} (considérés comme courbes rationnelles). On établit aisément que:

Les courbes de F invariantes pour une transformation birationnelle involutive de cette surface en elle-même sont de genre $10\nu^2+1$. Elles se groupent en systèmes linéaires incomplets, les uns de dimension $5\nu^2+1$, dépourvus de points-bases, et en systèmes de dimension $5\nu^2-1$, ayant pour points-bases les huit points de F unis pour la transformation ($\nu=1,2,\ldots$).

7. — Existence des transformations involutives de F. — Rapportons projectivement les courbes A_1 aux plans d'un S_3. F se transforme birationnellement en une surface d'ordre quatre F^*. Aux courbes A_1 correspondent les sections planes A_1^*, aux courbes A_2 des sextiques gauches de genre trois A_2^*.

Considérons la courbe $A_3^* \equiv 3\,A_1^* - A_2^*$. C'est une sextique gauche de genre trois et les ∞^3 surfaces cubiques qui la contiennent découpent, sur F^*, les courbes A_2^*.

En rapportant projectivement les surfaces cubiques passant par A_3^* aux plans d'un S_3', on obtient une transformation crémonienne bien connue [1]), qui fait également correspondre aux plans de S_3 des surfaces cubiques de S_3' passant par une sextique gauche de genre trois. Cette transformation, que nous désignerons par U_1, fait correspondre à F^* une surface F_1 du quatrième ordre. F_1 ayant les mêmes modules que F^*, il est possible de passer de l'une à l'autre par une projectivité U_2. La transformation $T_2^* \equiv U_1 U_2$ est une transformation de même nature que U_1, mais laisse F^* invariante.

T_2^* transforme les surfaces cubiques passant par A_3^* en les plans de l'espace et ceux-ci en des surfaces cubiques passant par une sextique gauche K appartenant à F^*. A une courbe d'ordre ξ, s'appuyant en ζ points (simples) sur A_3^*, T_2^* fait correspondre une courbe d'ordre $3\xi-\zeta$, s'appuyant en $8\xi-3\zeta$ points sur K.

Remarquons que A_1^*, A_2^* sont indépendantes et forment donc une base. Cette base est de plus une base minima, puisque son déterminant a la valeur minima -20. On peut donc trouver deux entiers ν_1, ν_2 tels que

$$K \equiv \nu_1 A_1^* + \nu_2 A_2^* .$$

Exprimons que K est de genre trois et d'ordre six (c'est-à-dire rencontre A_1^* en 6 points). Nous avons:

[1]) Voir, par exemple: Nouveaux types de congruences linéaires de cubiques gauches, par L. Godeaux. Nouvelles Annales de Math., 1909, (4), IX.

$$\nu_1^2 + 3\nu_1\nu_2 + \nu_2^2 = 1,$$
$$2\nu_1 + 3\nu_2 = 3.$$

Deux solutions sont possibles: a) $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1$ ou b) $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = -1$.

Dans le cas a), K est une courbe A_2^*. Alors, T_2^{-1} transforme une courbe A_2^* en une courbe gauche d'ordre 12 et de genre trois. Mais alors cette courbe peut être représentée par le symbole $k_1 A_1^* + k_2 A_2^*$, $k_1 k_2$ étant des entiers satisfaisant aux équations

$$k_1^2 + 3k_1k_2 + k_2^2 = 1,$$
$$2k_1 + 3k_2 = 6.$$

Ces équations étant impossibles en nombres entiers, le cas a) ne peut se présenter.

La courbe K est donc une courbe A_3^*. Alors, les transformations T_2^*, T_2^{*-1} changent une courbe A_2^* en des sections planes. Celles-ci sont les mêmes, car autrement F^* serait invariante pour une homographie involutive. Nous avons déjà vu que cela était impossible. Par conséquent, T_2^* est involutive et se confond avec T_2 dont l'existence est ainsi prouvée.

8. — Groupe de transformations de la surface F en elle-même. — Nous venons de voir que la surface F possède des transformations involutives. A ces transformations correspondent des substitutions de $f(\lambda_1, \lambda_2)$ en elle-même qui ont été déterminées. Considérons en particulier les transformations involutives auxquelles correspondent les substitutions

$$\theta_{2,0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_{2,2} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

et désignons les respectivement par T_2, T_3. A la transformation $T_1 = T_3 T_2$ correspond la substitution

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

qui n'est pas périodique et dont les différentes puissances reproduisent les substitutions non périodiques de $f(\lambda_1, \lambda_2)$. Nous voyons donc que les transformations T_2, T_3 engendrent tout le groupe de transformations de F en elle-même.

Toute transformation non périodique est de la forme $(T_3 T_2)^i$, toute transformation involutive de la forme $(T_3 T_2)^i T_3$.

Remarquons qu'à la substitution

$$\theta_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ne saurait correspondre une transformation de F, car une telle transformation changerait des courbes C_1 en elles-mêmes, ce qui est impossible. [M. Severi a établi que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ correspond à une transformation changeant C_1 en $\alpha C_1 + \gamma C_2$, C_2 en $\beta C_1 + \delta C_2$]. Si à la substitution

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

correspondait une transformation effective de F, il en serait de même de la substitution

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ce que nous venons de voir impossible. Donc il ne correspond des transformations effectives de F qu'aux substitutions

$$\theta_1^{2i} = \begin{pmatrix} \alpha_{2i} & \alpha_{2i-1} \\ -\alpha_{2i-1} & -\alpha_{2i-2} \end{pmatrix}, \quad \theta_{2,2i} = \begin{pmatrix} \alpha_{2i-1} & \alpha_{2-i} \\ -\alpha_{2i-2} & -\alpha_{2i-1} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons résumer nos résultats dans le théorème suivant:

Une surface du quatrième ordre, assujettie à la seule condition de contenir une sextique gauche de genre trois, contient deux systèmes linéaires de ces sextiques gauches.

Il existe une transformation birationnelle involutive T_2 de la surface en elle-même que l'on obtient en rapportant projectivement les plans de l'espace aux surfaces cubiques passant par une sextique de l'un des systèmes. En opérant de même sur l'autre, on obtient une autre transformation involutive T_3 de la surface en elle-même. Ces deux transformations engendrent le groupe des transformations de la surface en elle-même. Les transformations $T_1^k = (T_3 T_2)^k$ ne sont pas périodiques, les transformations $(T_3 T_2)^k T_3$ sont involutives.

Ce groupe est en isomorphisme heloédrique avec le sous-groupe de substitutions unimodulaires de la forme

$$\lambda_1^2 + 3\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2$$

en elle-même, engendré par les substitutions

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

qui correspondent respectivement à T_2 et T_3.

Les transformations involutives engendrent des involutions d'ordre deux et de genres un.