Bulletin de la Classe des sciences

Construction de variétés algébriques non rationnelles privées de variété canonique

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de l'image de l'involution des couples de points conjugués par rapport à n + 1 hyperquadriques et à un système nul dans un espace linéaire à n + 1 dimensions. Cette image est privée de variété canonique mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro si n est impair.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Construction de variétés algébriques non rationnelles privées de variété canonique. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 54, 1968. pp. 1486-1492;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1968.62300;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1968_num_54_1_62300;

Fichier pdf généré le 22/02/2024

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction de variétés algébriques non rationnelles privées de variété canonique

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de l'image de l'involution des couples de points conjugués par rapport à $n + 1$ hyperquadriques et à un système nul dans un espace linéaire à $n + 1$ dimensions. Cette image est privée de variété canonique mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro si n est impair.

Dans un travail récent ([1]), nous avons considéré l'involution engendrée par les couples de points conjugués par rapport à $n + 2$ hyperquadriques d'un espace à $n + 1$ dimensions et montré que l'image de cette involution est une variété à n dimensions privée de variété canonique mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro si n est pair, généralisant ainsi un théorème d'Enriques pour $n = 2$. Il importait de voir si une variété privée de variété canonique et possédant une variété bicanonique d'ordre zéro avait en général un nombre pair de dimensions. La réponse à cette question est négative. Nous considérons dans cette note l'involution que l'on obtient en remplaçant l'une des hyperquadriques par un système-nul. On obtient une variété en question si n est impair, mais l'involution possède un nombre fini de points unis et par suite son image possède des points multiples.

([1]) *Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1968, pp. 1399-1407).

Nous établissons précisément le théorème suivant :

Les couples de points conjugués par rapport à n + 1 *hyperquadriques et à un système-nul dans un espace linéaire à* n + 1 *dimensions forment une involution qui a pour image, dans un espace linéaire à* (n + 1) (n + 2) : 2 *dimensions, une variété qui possède* 2^{n+1} *points multiples isolés d'ordre* 2^{n-1} *et :*

si n *est impair, est dépourvue de variété canonique mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro,*

si n *est pair, possède une variété canonique et des variétés pluri-canoniques d'ordre zéro.*

Nous considérons également une image de l'involution dans un espace linéaire à $(n^2 + 3n - 2) : 2$ dimensions, où les 2^{n+1} points multiples sont remplacés par des espaces linéaires à $n - 1$ dimensions.

1. Soient, dans un espace à $n + 1$ dimensions, $n + 1$ hyperquadriques linéairement indépendantes. Représentons par

$$f_o(y,z) = 0, f_l(y,z) = o, \cdots, f_n(y,z) = 0 \tag{1}$$

les polarités par rapport à ces hyperquadriques. Les points conjugués par rapport à ces hyperquadriques se correspondent dans une transformation birationnelle involutive T [1]. En résolvant les équations (1) par rapport à $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$, on trouve que ces quantités sont proportionnelles aux déterminants tirés de la matrice

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial y_0} \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial y_{n+1}} \right\| \tag{2}$$

$$(i = 0,1,\ldots,n + 1)$$

le déterminant correspondant à y_k étant obtenu en supprimant la colonne contenant les dérivées par rapport à y_k.

Aux points d'un hyperplan correspondent les points d'une hypersurface d'ordre $n + 1$ dont l'équation s'obtient en faisant précéder la matrice (2) d'une ligne de constantes. Ces hypersurfaces passent par la variété M_{n-1} à $n - 1$ dimensions, d'ordre $(n + 1)$ $(n + 2)$: 2 représentée en annulant la matrice (2).

[2] Cette transformation est un cas particulier d'une transformation que nous avons étudiée autrefois dans une note *Sur une correspondance crémonienne entre deux espaces à n dimensions* (Rendiconti del Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1910, pp. 116-119). Dans ce travail, les polarités sont remplacées par des réciprocités, mais les points essentiels restent les mêmes.

Il existe une infinité de droites s'appuyant en $n+1$ points sur la variété M_{n-1}. Le lieu de ces droites est une variété M_n à n dimensions, d'ordre $n(n+2)$ passant $n+1$ fois par la variété M_{n-1}.

La transformation T possède 2^{n+1} points unis formant la base du système d'hyperquadriques considéré.

Faisons précéder la matrice (2) d'une ligne de polynomes du premier degré en $z_0, z_1, \ldots, z_{n+1}$. En égalant à 0 le déterminant obtenu, on obtient une hypersurface V d'ordre $n+2$. Pour que cette variété soit transformée en elle-même par T, il faut et il suffit que les polynomes proviennent soit d'une polarité par rapport à une $(n+2)$-ième hyperquadrique, soit d'un système-nul. Nous avons considéré le premier cas dans la note citée plus haut et nous fixerons l'attention sur le second cas.

Si

$$\varphi(y,z) = 0$$

est l'équation d'un système-nul, l'équation de l'hypersurface sera

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{n+1}} \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial y_0} & \dfrac{\partial f_i}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial y_{n+1}} \end{vmatrix} = 0$$

Nous la désignerons par V_0.

2. Le système linéaire $|V|$ contient

$$(n+2)^2 - (n+2) = (n+1)(n+2)$$

hypersurfaces linéairement indépendantes, en défalquant les $n+1$ hyperquadriques et le système-nul intervenant dans la construction de V_0.

Le système $|V|$ est transformé en lui-même par T et contient deux systèmes linéaires partiels de variétés transformées en elles-mêmes par T.

L'un de ces systèmes, $|V_1|$, est obtenu en faisant précéder la matrice (2) des polynomes tirés d'une polarité. Il contient

$$\rho + 1 = \frac{1}{2}(n+2)(n+3) - (n+1) = \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 4)$$

hypersurfaces linéairement indépendantes.

Le second système est obtenu en faisant précéder la matrice (2) des polynomes tirés de l'équation d'un système-nul. Il contient l'hypersurface V_0 et

$$\sigma + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1 = \frac{1}{2}n(n+3)$$

hypersurfaces linéairement indépendantes. Nous le désignerons par $| V_2 |$.

Le degré du système $| V |$ est égal à

$$\sum_{r=0}^{n+1} \binom{n+1}{r}^2$$

Sur V_0, T détermine une involution I d'ordre deux possédant 2^{n+1} points unis, car un point commun aux $n+1$ hyperquadriques considérées est son propre conjugué par rapport au système-nul $\varphi = 0$.

Les variétés V_1 découpent sur V_0 des variétés que nous désignerons par F_1 qui ne passent pas par les points unis de l'involution I. Par contre, les variétés F_2 découpées sur V_0 par les variétés V_2 passent simplement par les points unis de I.

Sur V_0, tout système linéaire de variétés à $n-1$ dimensions est son propre adjoint et la variété possède une variété canonique et des variétés pluricanoniques d'ordre zéro. Si l'on désigne par F les variétés découpées par les variétés V sur V_0, on a

$$| F' | = | F |.$$

Nous pouvons obtenir deux images de l'involution I :
une variété Ω_1 obtenue en rapportant projectivement aux hyperplans d'un espace à ρ dimensions les variétés F_1,
une variété Ω_2 obtenue en rapportant projectivement les variétés F_2 aux hyperplans d'un espace à σ dimensions.

3. Considérons en premier lieu la variété Ω_1 dont les sections hyperplanes correspondent aux variétés F_1. Nous les désignerons par Φ_{11}. Elle appartient à un espace S_ρ à $\rho = (n+1)(n+2) : 2$ dimensions.

Aux variétés F_2 correspondent sur Ω_1 des variétés que nous désignerons par Φ_{12} ; elles passent par les points de diramation de Ω_1.

A chacun des 2^{n+1} points unis de l'involution I correspond sur Ω_1 un point de diramation multiple d'ordre 2^{n-1}, le cône tangent en ce point ayant pour sections hyperplanes des variétés de Veronese généralisées [1]. Chacun de ces points est équivalent au point de vue des transformations birationnelles à une variété rationnelle à $n-1$ dimensions. Si l'on désigne par Δ la somme des variétés rationnelles équivalentes aux 2^{n+1} points de diramation, on a la relation fonctionnelle

$$2\Phi_{11} \equiv 2\Phi_{12} + \Delta$$

Le long d'une variété Φ_{12}, il existe une hyperquadrique touchant la variété Ω_1.

Considérons une variété $\overline{F}_1$ et soit $\bar{\Phi}_{11}$ son homologue sur Ω_1.

Sur $\overline{F}_1$, la transformation T engendre une involution privée de points unis et sur cette variété le système canonique, découpé par les variétés F, contient deux systèmes linéaires partiels $|(\overline{F}_1,F_1)|$, $|(\overline{F}_1,F_2)|$ appartenant à l'involution I. Sur $\bar{\Phi}_{11}$, l'un des systèmes $|(\bar{\Phi}_{11},\Phi_{12})|$, $|(\bar{\Phi}_{11},\Phi_{12})|$ est le système canonique.

La variété F_1 ayant $n-1$ dimensions et les systèmes $|(\bar{\Phi}_{11},\Phi_{11})|$, $|(\bar{\Phi}_{11},\Phi_{12})|$ ayant respectivement les dimensions $\rho - 1 = n(n+3):2$ et $\sigma = (n^2+3n-2):2$, le système canonique de $\bar{\Phi}_{11}$ est le premier système si $n-1$ est impair et le second si $n-1$ est pair.

Si $n-1$ est impair, on a donc

$$|\Phi'_{11}| = |\Phi_{11}|$$

et sur Ω_1, tout système linéaire de variétés à $n-1$ dimensions est son propre adjoint. La variété Ω_1 possède une variété canonique et des variétés pluricanoniques d'ordre zéro et on a $P_g = P_2 = \ldots = P_k = \ldots = 1$.

Observons que sur une variété F_2, l'involution déterminée par T possède des points unis et que la variété Φ_{12} homologue possède des points multiples d'ordre 2^{n-2} aux points de diramation de Ω_1.

Si $n-1$ est pair, le système canonique de $\bar{\Phi}_{11}$ est le système $|(\bar{\Phi}_{11}, \Phi_{12})|$ et on a

$$|\Phi'_{11}| = |\Phi_{12}|$$

[1] Voir notre note sur les *Variétés algébriques contenant une involution cyclique n'ayant que des points unis de première espèce* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1968, pp. 1139-1146).

La variété Ω_1 est dépourvue de variété canonique.

Sur une variété Φ_{12}, le système canonique ne peut être $|(\Phi_{12}, \Phi_{11})|$ et on a

$$|\Phi'_{12}| = |\Phi_{11}|, |\Phi''_{11}| = |\Phi'_{12}| = |\Phi_{11}|$$

La variété Ω_1 possède donc une variété bicanonique d'ordre zéro.

Il est facile de voir que les plurigenres de rang impair sont nuls et ceux de rang pair sont égaux à l'unité. On a

$$P_g = P_3 = \cdots = P_{2k+1} = \cdots = 0, P_2 = P_4 = \cdots = P_{2k} = \cdots = 1$$

4. Occupons-nous maintenant de la variété Ω_2 obtenue en rapportant projectivement les variétés F_2 aux hyperplans d'un espace S_σ à $\sigma = (n^2 + 3n - 2) : 2$ dimensions.

Les variétés F_2 passant par les 2^{n+1} points unis de l'involution I, l'ordre de Ω_2 est égal à la moitié du degré du système $|F_2|$, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}^2 - 2^n$$

A un point uni de l'involution I correspond dans Ω_2 un espace linéaire à $n - 1$ dimensions, de sorte que la variété Ω_2 contient 2^{n+1} espaces linéaires à $n - 1$ dimensions ne se rencontrant pas deux à deux.

Les variétés Ω_1 et Ω_2 sont birationnellement identiques et au domaine d'un point de diramation de Ω_1 correspond un espace à $n - 1$ dimensions de Ω_2. La variété Δ a pour homologue la somme des espaces à $n - 1$ dimensions de Ω_2.

Nous désignerons par Φ_{21} les variétés qui correspondent sur Ω_2 aux variétés F_1 et par Φ_{22} les sections hyperplanes de Ω_2 qui correspondent aux variétés F_2.

Nous avons

$$2\Phi_{21} \equiv 2\Phi_{22} + \Delta$$

Si n est pair, nous avons

$$|\Phi'_{21}| = |\Phi_{21}|, |\Phi'_{22}| = |\Phi_{22}|$$

et le système canonique d'une variété Φ_{22} section hyperplane de Ω_2 coïncide avec le système de ses sections hyperplanes. Φ_{22} est une variété projectivement canonique.

5. Considérons le cas $n = 3$. La variété Ω_1, d'ordre 35, située dans un espace S_{10} à dix dimensions, possède 16 points quadruples à cônes tangents rationnels. Elle est dépourvue de surface canonique mais possède une surface bicanonique d'ordre zéro.

Une section hyperplane Φ_{11} de Ω_1 a les genres $p_a = p_g = 9$ puisque le système canonique de cette surface est découpé par les surfaces Φ_{12}. On a d'autre part $p^{(1)} = 36$.

La variété Ω_2 a l'ordre 27 et appartient à un espace S_8 à huit dimensions. Elle contient 16 plans ne se rencontrant pas deux à deux.

Une section hyperplane Φ_{22} a les genres $p_a = p_g = 11$, $p^{(1)} = 36$.

Liège, le 10 décembre 1968.