# SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES POSSÉDANT UN SYSTÈME SIMPLE DONT LES COURBES CONTIENNENT UNE INVOLUTION;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

On sait que M. Castelnuovo a établi le théorème suivant (¹) :

*Si une surface algébrique contient un réseau simple de courbes hyperelliptiques de genre p, cette surface est rationnelle ou réglée de genre p.*

On étend facilement ce théorème au cas d'une surface possédant un réseau de courbes contenant des involutions d'ordre 2 et de genre quelconque (²). Plus tard, nous avons, en poursuivant cet ordre de recherches, déterminé les surfaces contenant un système linéaire simple $\infty^3$ dont chaque courbe possède une involution d'ordre 3 de genre donné (³). Actuellement, nous considérerons le cas plus général d'une surface contenant un système linéaire simple, de dimension $r$, dont chaque courbe possède une involution d'ordre $r$. Nous établirons précisément que :

*Si une surface algébrique contient un système linéaire simple, de dimension r et de genre p de courbes contenant une involution d'ordre r et de genre $\pi$, cette surface est rationnelle, ou réglée de genre $\pi$ ou p.*

On remarquera que dans le cas $r = 3$, que nous avions déjà considéré, le théorème auquel nous étions arrivé se trouve notablement précisé.

---

(¹) *Su le superficie che contengono una rete di curve iperellittiche* (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 1ᵉʳ sem. 1894).

(²) *Voir* par exemple : L. GODEAUX, *Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont elliptiques doubles* (*Math. Annalen*, Bd LXXII, 1912).

(³) L. GODEAUX, *Sur les surfaces algébriques contenant un système linéaire simple dont chaque courbe possède une involution de termes de points* (*Annaes da Accad. Polytechnica do Porto*, t. VII, 1912).

L. GODEAUX.

1. Soit F une surface algébrique contenant un système linéaire simple, $|C|$, $\infty^r$, de genre $p$, dont chaque courbe possède une involution $\gamma_r^1$, d'ordre $r$ et de genre $\pi$.

Considérons les courbes C passant par un point P de F, quelconque, et, sur chacune de ces courbes, les groupes de $r$ points dont P fait partie. Nous obtenons ainsi une variété $V_P$, de dimension $r - 1$, de groupes de $r - 1$ points variables. Il peut se faire que les groupes de $V_P$ se trouvent tous sur une même courbe $\Gamma_P$ ou qu'ils se distribuent sur toute la surface.

Dans la première hypothèse, trois cas peuvent se présenter : Si nous considérons les courbes $\Gamma_Q$ lieu des variétés $V_Q$ relatives aux points Q de la courbe $\Gamma_P$, il peut se faire que ces courbes $\Gamma_Q$ se confondent avec la courbe $\Gamma_P$, ou se confondent en une seule courbe différente de $\Gamma_P$, ou encore soient toutes distinctes. Nous aurons donc en tout quatre cas à examiner :

1° Les groupes de $V_P$ sont sur une courbe $\Gamma_P$ qui ne varie pas lorsque le point P parcourt cette courbe.

2° Les groupes de $V_P$ sont sur une courbe $\Gamma_P$ et les groupes des variétés $V_Q$ relatives aux points Q de $\Gamma_P$ sont sur une même courbe $\Gamma_Q$ différente de $\Gamma_P$.

3° Les groupes de $V_P$ sont sur une courbe $\Gamma_P$ variable avec le point P.

4° Les groupes de $V_P$ remplissent toute la surface.

Nous examinerons successivement ces différents cas.

2. Dans le premier cas, nous voyons que la courbe $\Gamma_P$ est rencontrée par les courbes C en des groupes de $r$ points formant une série de dimension $r$. La courbe $\Gamma_P$ est par suite rationnelle. De plus, cette courbe passe simplement par le point P, puisque celui-ci peut être choisi arbitrairement sur la courbe. Par suite, par un point arbitraire de F ne passe qu'une seule courbe de la famille $\{\Gamma\}$ lieu des courbes $\Gamma_P$. Cette famille est donc un faisceau. Les courbes de ce faisceau découpent, sur une courbe C arbitraire, la série $\gamma_r^1$ de genre $\pi$ appartenant à cette courbe par hypothèse; c'est donc un faisceau de genre $\pi$. La surface F, contenant un faisceau de genre $\pi$ de courbes rationnelles, se ramène,

par des transformations birationnelles, à une réglée de genre $\pi$

$$(p_a = -\pi,\ p_g = P_2 = \ldots = 0).$$

3. Passons au second cas et supposons d'abord les courbes $\Gamma_P$, $\Gamma_Q$ irréductibles. Ces courbes, appartenant à la même famille, doivent rencontrer les courbes C en un même nombre $n$ de points. Fixons l'attention sur une courbe C. A chacun des $n$ points de rencontre de cette courbe avec $\Gamma_P$ correspondent $r-1$ points de $\Gamma_Q$ situés sur cette courbe C. On doit donc avoir $n = (r-1)n$, d'où $r = 2$. Si $r > 2$, $\Gamma_Q$ et $\Gamma_P$ sont réductibles. Remarquons d'ailleurs que quand $r = 2$, on a $n = 1$, car, d'après la définition de $\Gamma_Q$, cette courbe ne peut rencontrer une courbe C passant par Q qu'en un point variable et, éventuellement, en un certain nombre $\nu$ de points confondus en Q. Or, actuellement, Q variant sur $\Gamma_P$ et $\Gamma_Q$ étant irréductible, on a $\nu = 0$, d'où $n = 1 + \nu = 1$.

Supposons $r > 2$ et soit $\Gamma'_P$ une des parties irréductibles de $\Gamma_P$. Nous supposerons que la courbe $\Gamma_Q$ relative à un point Q (variable) de $\Gamma'_P$ se décompose en $k-1$ fois $\Gamma'_P$ et en une courbe $\Gamma'_Q$. Indiquons par $n'$ le nombre de points communs à une C quelconque et à $\Gamma'_P$ et fixons l'attention sur une courbe C générique. A un point commun à cette courbe et à $\Gamma'_P$ correspondent $r-1$ points dont $k-1$ sont sur $\Gamma'_P$ et les $r-k$ restant parmi les intersections de la courbe C considérée et de $\Gamma'_Q$. La courbe $\Gamma'_Q$ rencontre donc les courbes C en $\frac{n'}{k}(r-k)$ points. Comme les parties irréductibles de $\Gamma'_Q$ appartiennent évidemment à la même famille $\{\Gamma'\}$ que $\Gamma'_P$, on voit que $\Gamma'_Q$ se décompose en $\frac{r-k}{k}$ courbes que nous désignerons par $\Gamma'$.

Observons que la courbe $\Gamma_Q \equiv (k-1)\Gamma'_P + \Gamma'_Q$ relative à un point Q déterminé de $\Gamma'_P$ rencontre une courbe C passant par Q en $r-1$ points variables et en $\nu$ points fixes confondus en Q. Il s'ensuit que $\Gamma'_Q$ rencontre une courbe C en $r-k$ points seulement et que, par conséquent, on a

$$\frac{n'}{k}(r-k) = r-k,$$

d'où $n' = k$.

Si $k$ est supérieur à l'unité, les courbes C passant par Q déterminent, sur la courbe $\Gamma'_P$, des groupes de $k-1$ points en nombre $\infty^{r-1}$; on a donc $k \geq r$. Mais $\frac{r-k}{k}$ doit être un entier positif, donc on a nécessairement $k=1$.

Les courbes $\Gamma_P$, $\Gamma_Q$ se décomposent donc en $r$ courbes $\Gamma'$ rencontrant chacune les courbes C en un point. Ces courbes sont par suite rationnelles et, de plus, elles forment un faisceau $\{\Gamma'\}$ de même genre $p$ que les courbes C.

La surface F, possédant un faisceau de genre $p$ de courbes rationnelles, se ramène, par des transformations birationnelles, à une réglée de genre $p$ $(p_a = -p,\ p_g = P_2 = \ldots = 0)$.

4. Dans le troisième cas, la courbe $\Gamma_P$ est rencontrée, par les courbes C passant par P, en $\infty^{r-1}$ groupes de $r-1$ points. La courbe $\Gamma_P$ est donc rationnelle. La surface F, contenant $\infty^2$ courbes rationnelles $\Gamma_P$, est, d'après un théorème bien connu de M. Castelnuovo, rationnelle $(p_a = P_2 = 0)$.

5. Reste à traiter le dernier cas, celui où les groupes de $r-1$ points dont la variété V est formée se distribuent sur toute la surface F.

Considérons les groupes de $r-1$ points de $V_P$ appartenant aux courbes C (passant par P) d'un faisceau. Ces $\infty^1$ groupes engendrent une courbe que nous désignerons aussi par $\Gamma$. La courbe $\Gamma$ relative à un faisceau déterminé de courbes C passant par P est rencontrée par ces courbes en $r-1$ points variables et en un certain nombre de points confondus en P; par conséquent, toutes les courbes C passant par P rencontrent une courbe $\Gamma$ en $r-1$ points.

Supposons $r > 3$ et rapportons projectivement les courbes C passant par P aux hyperplans d'un espace $S_{r-1}$ à $r-1$ dimensions. La surface F se transforme en une surface simple $F^*$ et aux courbes $\Gamma$ correspondent sur $F^*$ des courbes $\Gamma^*$ d'ordre $r-1$. Or, une courbe d'ordre $r-1$ située dans un espace linéaire à $r-1$ dimensions est rationnelle, donc les courbes $\Gamma^*$ et par suite les courbes $\Gamma$ sont rationnelles. Il se pourrait que le système $\{\Gamma\}$ formé par les courbes $\Gamma$ construites plus haut en partant du point P soit composé au moyen d'un faisceau. Mais ce faisceau varie nécessairement avec le point P, car autrement on retomberait sur un des cas précédemment étudiés, puisque tous les groupes de $r$ points des séries $\gamma'_r$ appartenant aux courbes C se distribuerait sur les courbes d'un unique faisceau. On voit donc que la surface F, dans le cas actuel, possède au moins $\infty^1$ courbes rationnelles et est, par suite, rationnelle ($p_a = P_2 = 0$).

Supposons enfin $r = 3$. A chaque point P correspond une variété $\infty^2$ $V_P$ de couples de points qui est rationnelle, car à une courbe C passant par P correspond un couple de $V_P$ et inversement.

Soit $\pi$ un plan. Entre $\pi$ et $V_P$ établissons une correspondance birationnelle. A une courbe Γ correspond alors, sur $\pi$, une courbe double $\Gamma^*$.

Une courbe C passant par P rencontre chaque courbe Γ en deux points variables. Les $\infty^2$ courbes C passant par P déterminent donc, sur une courbe Γ, soit une $g_2^2$, soit une $g_2^1$. Mais une Γ contient $\infty^1$ groupes de deux points de $V_P$; dans l'hypothèse d'une $g_2^1$, les courbes C découperaient, sur Γ, les $\infty^1$ groupes de $V_P$ qui se trouvent sur cette courbe. Aux courbes C passant par P correspondent alors sur $\pi$ des courbes doubles. Or, cela est en contradiction avec l'hypothèse initiale que $|C|$ est simple. On conclut donc que chaque courbe Γ contient une série $g_2^2$ et est par suite rationnelle. On démontre alors, comme plus haut, que F est rationnelle

$$(p_a = P_2 = 0).$$

(Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLVIII; 1920, p. 9-13.)