Étude d'une involution cubique,
douée d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique

Les involutions appartenant à une surface algébrique peuvent posséder, soit un nombre infini, soit un nombre fini de points de coïncidence. En étudiant celles qui jouissent de cette dernière propriété, nous avons pu démontrer qu'elles sont engendrées par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même (1).

Considérons une involution d'ordre trois, I_3, appartenant à une surface algébrique F et n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences. Soient T la transformation birationnelle de F en elle-même engendrant I_3, P un des points de coïncidence de cette involution. Une courbe C, tracée sur F et passant par P, n'est pas en général transformée en elle-même par T. Soit C' la courbe que T fait correspondre à C. Il peut arriver que C' touche C en P, quelle que soit la direction de la tangente à C en P. Dans ce cas, le point P est dit point de *coïncidence parfaite*. Jusqu'à présent, les seules involutions étudiées de une manière complete et n'admettant qu'un nombre fini de coïncidences, ne possédaient que des points de coïncidence non parfaite. Cela tenait à la nature de la surface F (2).

(1) «Sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique», *Rend. R. Accad. Lincei*, 1° sem. 1914.

(2) Enriques-Severi: «Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques», *Acta Mathematica*, 1909; Baguera et De Franchis: «Le superficie algebriche che ammettono.....», *Memorie della Soc. ital. delle Scienze*, 1908; L. Godeaux: «Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un», *Annales de l'Ec. Normale Supérieure*, 1914; L. Godeaux: «Mémoire sur les surfaces algébriques de genre zéro et de bigenre un», *Bull. Soc. Math. de France*, 1915. Voir aussi nos autres travaux sur les involutions.

Si l'on considére une surface algébrique Φ, dont les points représentent les groupes de I_3, on établit qu'à un point de coïncidence parfaite correspond un point de diramation qui est un point triple conique pour la surface Φ. Au contraire, à un point de coïncidence non-parfaite correspond un point de diramation qui est un point double biplanaire ordinaire de Φ (1).

Dans ce travail, nous allons considérer une involution cubique appartenant à une certaine surface du cinquième ordre et présentant des points de coïncidence parfaite et non parfaite. Nous ferons la théorie compléte de cet exemple.

1. Considérons la surface F, d'ordre 5,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv a x_1^4 x_2 + b x_1 x_2^4 + c x_1^3 + d x_1^2 x_2^2 + \\ + f x_1 x_2 + g x_2^3 + h = 0,$$

où a, b sont des constantes; c, d, f, g, h des polynomes homogénes en x_3, x_4 respectivement de degrés 2, 1, 3, 2 et 5.

L'homographie T, de période 3,

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = \varepsilon x_1 : \varepsilon^2 x_2 : x_3 : x_4,$$

où ε est une racine cubique primitive de l'unité $\left(\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)$, transforme la surface F en elle-même et engendre, sur cette surface, une involution I_3, d'ordre 3.

La transformation T posséde deux points $(x_1 = x_3 = x_4 = 0)$, $(x_2 = x_3 = x_4 = 0)$ invariants et une droite $(x_1 = x_2 = 0)$ invariante. La surface F passe simplement par les deux points et rencontre la droite en cinq points en général distincts. L'involution I_3 posséde donc, sur F, sept points de coïncidence que nous désignerons respectivement par P_1, P_2, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, ces cinq derniers étant ceux qui se trouvent sur la droite invariante.

Soit C une courbe tracée sur la surface F, passant par P_1, et non transformée en elle-même par T. Considérons le plan passant par P_1, P_2 et tangent en P_1 à la courbe C. La section de F par ce plant est invariante pour T, donc T transforme C en une courbe C' la touchant en P_1. Par suite P_1 (et P_2) sont des points de coïncidence parfaite pour I_3.

Soit maintenant C une courbe tracée sur F, passant par Q_1 et non

(1) *C. R.*, 1er sem. 1914.

transformée en elle-même par T. Considérons le plan passant par Q_1, Q_2 et tangent à C en Q_1, et supposons que ce plan ne coïncide pas soit avec $x_1 = 0$, soit avec $x_2 = 0$. Soit

$$x_1 + \lambda x_2 = 0$$

l'équation du plan. L'homographie T transforme ce plan en

$$x_1 + \lambda\varepsilon x_2 = 0,$$

et la courbe C en une courbe C' passant par Q_1, mais n'y touchant par C. Le point Q_1 est donc un point de coïncidence non parfaite, et il en est evidemment de même de Q_2, Q_3, Q_4 et Q_5.

L'involution cubique I_3 *possè de deux points de coïncidence parfaite et cinq points de coïncidence non-parfaite.*

2. Considérons le système complet découpé sur la surface F par les surfaces cubiques. Soit $|A|$ ce système; ou sait qu'il a le degré 45, le genre 31 et la dimension 19. Une courbe A de ce système n'est pas, en général, transformée en elle-même par T, mais il y a, dans $|A|$, trois systèmes partiels composés avec I_3 et dont chaque courbe est donc transformée en elle-mème par T. Ces systèmes, que nous désignerons par $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$, sont découpés sur F, respectivement par les surfaces cubiques d'équations:

$$(A_1)\, a_{111}x_1^3 + a_{222}x_2^3 + a_{123}x_1x_2x_3 + a_{124}x_1x_2x_4 + a_{333}x_3^3 + \\ + a_{444}x_4^3 + a_{334}x_3^2x_4 + a_{344}x_3x_4^2 = 0,$$

$$(A_2)\, a_{112}x_1^2x_2 + a_{133}x_1x_3^2 + a_{144}x_1x_4^2 + a_{134}x_1x_3x_4 + \\ + a_{223}x_2^2x_3 + a_{224}x_2^2x_4 = 0,$$

$$(A_3)\, a_{122}x_1x_2^2 + a_{233}x_2x_3^2 + a_{244}x_2x_4^2 + a_{234}x_2x_3x_4 + \\ + a_{113}x_1^2x_3 + a_{114}x_1^2x_4 = 0.$$

Seul de ces systèmes, le prémier est dépourvu de points-base. Raportons projectivement les courbes A_1 aux hyperplans d'un espace linéaire à 7 dimensions, S_7. Nous obtenons une surface Φ, d'ordre 15, à sections hyperplanes de genre 11, image de l'involution I_3. En d'autres termes, posons, ρ étant un facteur de proportionnalité,

$$\rho X_1 = x_1^3,\quad \rho X_2 = x_2^3,\quad \rho X_3 = x_3^3,\quad \rho X_4 = x_4^3,$$
$$\rho X_5 = x_1x_2x_3,\quad \rho X_6 = x_1x_2x_4,\quad \rho X_7 = x_3^2x_4,\quad \rho X_8 = x_3x_4^2.$$

L'élimination de ρ, x_1, x_2, x_3, x_4 entre ces équations et

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

fournit les équations de Φ. Si l'on désigne par

$$\varphi(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_8) = 0$$

l'équation que l'on obtient en éliminant ρ, x_1, x_2, x_3, x_4, entre les équations ci-dessus et $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, la surface Φ a pour équations

$$\left\| \begin{matrix} X_5 & X_7 & X_3 & X_8 \\ X_6 & X_8 & X_7 & X_4 \end{matrix} \right\| = 0$$

$$X_5^3 = X_1 X_2 X_3,$$

$$\varphi(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_8) = 0.$$

Aux points de coïncidence P_1, P_2, $Q_1, \ldots\ldots, Q_5$ correspondent, sur Φ, des points de diramation dont nous allons déterminer la nature.

3. Désignons par P'_1 le point de diramation de Φ correspondant au point P_1 de F. Le point P'_1 a pour coordonnés

$$X_1 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = 0.$$

Les courbes A_1 passant par le point P_1 sont découpées sur F par les surfaces

$$a_{111}x_1^3 + a_{123}x_1x_2x_3 + a_{124}x_1x_2x_4 + a_{333}x_3^3 + a_{444}x_4^3 + \\ + a_{334}x_3^2x_4 + a_{344}x_3x_4^2 = 0.$$

Remarquons que le plan $x_1 = 0$ touche la surface F en P_1 et que la surface dont l'équation vient d'étre écrite rencontre le plan $x_1 = 0$ suivant la courbe

$$x_1 = 0 \quad a_{333}x_3^3 + a_{444}x_4^3 + a_{334}x_3^2x_4 + a_{344}x_3x_4^2 = 0,$$

c'est-à-dire suivant trois droites passant par P_1. On en conclut que la courbe A_1 passant par P_1 y posséde un point triple à tangentes variables.

A une telle courbe A_1 correspond, sur Φ, une section hyperplane passant par P'_1. Soit π le genre de cette section hyperplane. On a, d'après la formule bien connue de Zeuthen,

$$6(\pi - 1) + 3 \cdot 2 = 2(31 - 4),$$

d'où $\pi = 9$. Or, une section hyperplane de Φ a, en général, le genre 11, il y a donc, en P'_1, une singularité abaissant le genre d'une section hyperplane de deux unités.

Nous venons de voir qu'une courbe A_1 passant par P_1 y acquiert un point triple. Comme P_1 est un point de coïncidence parfaite, il y a, infiniment voisins de P_1 sur la courbe considérée, trois groupes de I_3, un sur chaque branche. A ces groupes correspondent, sur la section hyperplane de Φ correspondante, trois points infiniment voisins de P'_1, et variables avec la section hyperplane. De tout ceci, on conclut que Φ posséde, en P'_1, un point triple conique à *cône tangent rationnel.*

La surface Φ posséde deux points de diramation parfaite qui sont des points triples equivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à des courbes rationnelles de degré -3.

4. Nous avons dejà en plusieurs fois l'occasion d'etudier des points de coïncidence non parfaite d'une involution cubique; nous ne reprendrons pas cette question, mais nous résumerons rapidement les points qui nous sont nécessaires.

Dans le voisinage du point Q_1 (ou Q_2, ou Q_3), il y a deux points de coïncidence infiniment voisins. Ils sont actuellement respectivement dans les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Une courbe A_1 passant par Q_1, acquiert en se point un point double à tangentes fixes, celles-ci sont précisément dans les plans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Il y a ∞^5 courbes A_1 passant par Q_1 et ayant en ce point un point triple à tangentes variables.

Un point de diramation non parfaite est un point double biplanaire ordinaire (1) équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à deux courbes rationnelles de degré -2, ayant un point commun.

La surface Φ posséde cinq points doubles biplanaires ordinaires.

5. La surface F est une surface canonique, c'est-à-dire que ses sections planes forment le système canonique. Les courbes bicanoniques sont les sections de F par les quadriques; or ces quadriques découpent sur une courbe canonique la série canonique complete, donc F est régulière (résultat, du reste, bien connu). La surface F a les ca-

(1) Voir nos travaux cités plus haut.

ractères

$$p_g = p_a = 4, \quad p^{(1)} = 6, \quad P_2 = 10, \quad P_3 = 20, \quad \ldots..,$$

$$P_i = \frac{5}{2}(i^2 - i + 2). \quad \ldots..$$

Appliquons les formules que nous avons données dans une note recente (1) pour trouver les genres arithmétiques de Φ. On trouve, comme Φ est egalement régulière,

$$p_g = p_a = 2, \quad p^{(1)} = 2, \quad P_2 = 4, \quad P_3 = 6, \ldots..,$$

$$P_i = \frac{1}{2} i(i-1) + 3, \ldots..$$

Nous voyons donc que, en résumé,

L'involution I_3 *a pour image une surface* Φ, *d'ordre* 15, *le* S_7, *à sections hyperplanes de genre* 11, *possedant deux points triples à cônes tangents rationnels et cinq points doubles biplanaires: Cette surface à les genres* $p^{(1)} = 2$, $p_a = p_g = 2$, $P_2 = 4, \ldots..$, $P_i = \frac{i}{2}(i-1) + 3, \ldots..$

6. Désignons par $|C|$ le système des sections planes de F. En général, une courbe C n'est pas transformée en elle-même par T; les courbes C jouissant de cette propriété: sont celles dont les plans passent par $P_1 P_2$ ou dont les plans sont $x_1 = 0$ ou $x_0 = 0$. Désignons par Γ_0 une courbe de Φ correspondant à une courbe C dont le plan passe par $P_1 P_2$, par Γ_1, Γ_2 les courbes qui correspondent respectivement aux sections planes de F dont les plans sont $x_1 = 0$, $x_2 = 0$.

Les deux points coniques triples P'_1, P'_2 de Φ sont equivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à des courbes rationnelles de degré -3 que nous désigneron par Γ_{01}, Γ_{02} respectivement.

Les points $Q', \ldots.., Q'_5$ qui correspondent à $Q_1, Q_2, \ldots.., Q_5$ sur Φ sont equivalents chacun à deux courbes rationelles de degré -2 ayant un point commun. Nous désignerons par Γ_{i1}, Γ_{i2} les deux courbes composant le point double Q'_i.

A une courbe C arbitraire correspond, sur Φ, une courbe Γ de genre 6, ayant 5 points doubles variables. La courbe Γ a donc le genre virtuel 11 et le degré virtuel 15 (son degré effectif étant egal à celui de $|C|$). La courbe Γ appartient à un système complet $|\Gamma|$ dont

(1) *C. R.*, 11 Septembre 1916 (Une erreur s'est glissée dans la première formule donnant le genre lineaire; le lecteur l'aura aisément corrigée).

la courbe est en général dépourvue de points doubles variables (en des points simples de Φ) et dont les degrés et genre sont 15 et 11. Le système $|\Gamma|$ n'est autre, comme on le voit facilement, que le système des sections hyperplanes de Φ.

Faisons varier le plan contenant C d'une manière continue jusqu'à ce qu'il passe par P_1, P_2. La courbe Γ correspondante sur Φ variera d'une manière continue et se réduira à la courbe $3\,\Gamma_0 + \Gamma_{01} + \Gamma_{02}$. On aura donc

$$3\Gamma_0 + \Gamma_{01} + \Gamma_{02} \equiv \Gamma.$$

Faisons au contraire varier ce plan jusqu'à ce qu'il se confonde avec le plan $x_1 = 0$. La courbe C posséde alors un point double en P_1, puisque le plan $x_1 = 0$ touche la surface F en P_1. La courbe Γ correspondante se reduit alors à la courbe

$$3\Gamma_1 + \Gamma_{11} + \Gamma_{21} + \ldots\ldots + \Gamma_{51} + 2(\Gamma_{12} + \Gamma_{22} + \ldots\ldots + \Gamma_{52}) + 2\Gamma_{01}.$$

On a donc

$$3\Gamma_1 + \sum_{i=1}^{5}(\Gamma_{i1} + 2\Gamma_{i2}) + 2\Gamma_{01} \equiv \Gamma.$$

De même, on tramerait

$$3\Gamma_2 + \sum_{i=1}^{5}(\Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i1}) + 2\Gamma_{02} \equiv \Gamma.$$

On a donc les égalités symboliques

$$3\Gamma_0 + \Gamma_{01} + \Gamma_{02} \equiv 3\Gamma_1 + \sum_{i=1}^{5}(\Gamma_{i1} + 2\Gamma_{i2}) + 2\Gamma_{01} \equiv$$

$$\equiv 3\Gamma_2 + \sum_{i=1}^{5}(\Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i1}) + 2\Gamma_{02},$$

on encore les trois égalités

$$3\Gamma_0 + \Gamma_{02} \equiv 3\Gamma_1 + \sum_{i=1}^{5}(\Gamma_{i1} + 2\Gamma_{i2}) + \Gamma_{01},$$

$$3\Gamma_0 + \Gamma_{01} \equiv 3\Gamma_2 + \sum_{i=1}^{5}(\Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i1}) + \Gamma_{02},$$

$$3\Gamma_1 + \sum_{i=1}^{5}\Gamma_{i2} + 2\Gamma_{01} \equiv 3\Gamma_2 + \sum_{i=1}^{5}\Gamma_{i1} + 2\Gamma_{02}.$$

7. Considérons le système $|2C|$, c'est-à-dire le système découpé sur F par les quadriques. Une courbe de ce système n'est pas en général transformée en elle-même par T, mais il y a trois systèmes partiels contenus dans $|2C|$ et composés avec I_3. Ces systèmes ont respectivement les dimensions 3, 2 et 2. Désignons respectivement par $|\Gamma_0^{(2)}|$, $|\Gamma_1^{(2)}|$, $|\Gamma_2^{(2)}|$ les systèmes correspondants sur Φ. En raisonnant comme précédemment, on trouve les relations

$$\Gamma_0^{(2)} \equiv 2\Gamma_0,$$

(ce qui est évident, puisque $|\Gamma_0|$ et $|\Gamma_0^{(2)}|$ sont respectivement les systèmes canoniques et bicanoniques de Φ),

$$3\Gamma_1^{(2)} \equiv 3\Gamma_1 + \Gamma_{01},$$
$$3\Gamma_2^{(2)} \equiv 3\Gamma_2 + \Gamma_{02}.$$

8. Nous avons écrit plus haut les équations des surfaces cubiques découpant sur F des systèmes $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$ composés avec I_3. On a évidemment

$$A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \equiv 3C.$$

Désignons respectivement par $|\Gamma_0^{(3)}|$, $|\Gamma_1^{(3)}|$, $|\Gamma_2^{(3)}|$ les systèmes correspondants, sur Φ, aux systèmes $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$. On trouve

$$\Gamma_0^{(3)} \equiv \Gamma,$$

$$3\Gamma_1^{(3)} + \Gamma_{02} \equiv 9\Gamma_1 + 2\sum_{i=1}^{5}(\Gamma_{i1} + 2\Gamma_{i2}) + 4\Gamma_{01},$$

$$3\Gamma_2^{(3)} + \Gamma_{01} \equiv 9\Gamma_2 + 2\sum_{i=1}^{5}(\Gamma_{i2} + 2\Gamma_{i1}) + 4\Gamma_{02}.$$

On pourrait de même trouver les différentes courbes tracées sur Φ en partant des systèmes $|nC|$, n quelconque.

LUCIEN GODEAUX,
Docteur en Sciences physiques et mathématiques.

Front Belge, 6 Janvier 1917.