SUR LES

INVOLUTIONS

n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences, appartenant à certaines surfaces algébriques.

PAR

Lucien GODEAUX

Docteur en sciences physiques et mathématiques.

Une involution [1], appartenant à une surface algébrique, admet généralement une infinité de points de coïncidence formant une courbe. Dans certains cas, l'involution peut ne posséder qu'un nombre fini (même zéro) de points de coïncidences. Les premières involutions possédant cette propriété furent rencontrées dans la théorie des surfaces hyperelliptiques [2]. L'étude de ces involutions

[1] Il s'agira uniquement ici d'involutions doublement infinies.

[2] Voir Picard. *Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables.* (Journal de Liouville, 1889, (4), V). Humbert. *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques.* (Journal de Liouville, 1893, (4), IX). Traynard. *Sur les fonctions Thêta de deux variables et les surfaces hyperelliptiques.* (Annales de l'Ecole Normale, 1907).

conduisit MM. Bagnera et De Franchis [1] d'une part, MM. Enriques et Severi [2] d'autre part, à édifier une théorie complète des surfaces hyperelliptiques, c'est-à-dire des surfaces dont les coordonnées s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques de deux arguments.

D'autres involutions n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences ont été étudiées depuis. M. Enriques a établi qu'une involution de genres un ($p_a = P_4 = 1$) existant sur une surface de mêmes genres, est cyclique ou composée avec une involution cyclique [3]. En utilisant ce théorème, j'ai établi que l'ordre d'une pareille involution n'admet comme facteurs premiers que deux et trois [4].

Dans le travail actuel, je vais étudier les involutions n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences, situées sur une surface F ne possédant aucun faisceau irrationnel de courbes et sur laquelle une courbe de genre π engendre un système linéaire de degré $2\pi - 2$.

Après avoir établi, dans le chapitre I, que cette surface F est une surface de Picard ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$) ou une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), ou une surface de bigenre un ($p_a = P_g = 0$, $P_6 = 1$), je démontre, dans le chapitre II, un théorème général sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences. D'une manière précise, j'établis que l'involution est cyclique si la surface

[1] *Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funrioni iperellittiche di due argomenti* (Memorie della Societa dei XL. 1908, (3), XV).

[2] *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* (Acta Mathematica, 1909, XXXII, XXXIII.)

[3] *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* Rend. della R. Accad. di Bologna, marzo 1910.

[4] *Sur les correspondances rationnelles entre deux surfaces de genres un. Bull. de l'Acad. R. de Belgique*, 1913.

satisfait à une certaine condition. Celle-ci est précisément remplie par la surface F.

Dans le chapitre III, j'établis que l'ordre des involutions considérées n'admet que deux et trois comme facteurs premiers, lorsque le nombre de points de coïncidence est supérieur à zéro.

Les résultats auxquels j'arrive peuvent s'énoncer :

I. — *Une involution de genres un sur une surface de Picard, ou de genres un sur une surface de genres un, ou de bigenre un sur une surface de bigenre un, a l'ordre* $n = 2^{\alpha}.\ 3^{\beta}$.

II. — *Une involution de bigenre un sur une surface de Picard ou de genres un, à l'ordre* $n = 2^{\alpha}$.

Je retrouve donc certains résultats de MM. Bagnera et De Franchis, Enriques et Severi (involutions de genres un ou de bigenre un sur une surface de Picard), mais ma méthode diffère de celles de ces géomètres. MM. Bagnera et De Franchis s'étaient en effet servi de la représentation paramétrique des surfaces de Picard, MM. Enriques et Severi de la liaison des surfaces de Picard avec la surface de Jacobi (représentant les couples de points d'une courbe de genre deux).

La méthode que j'ai suivie est au fond, celle que j'ai déjà utilisée dans mon travail cité plus haut ; j'ai simplement apporté des modifications qui me semblent rendre plus clair mon raisonnement.

J'ajouterai que la même méthode me permet de limiter les exposants de 2 et de 3 dans l'ordre d'une involution. Dans un Mémoire dont je viens de commencer la rédaction, je donne une classification complète des involutions de genres un sur une surface de genres un.

CHAPITRE I

Définitions et propriétés des surfaces algébriques considérées. Involutions pouvant exister sur ces surfaces.

1. — Les surfaces algébriques F dont il sera question dans ce travail sont caractérisées par les deux propriétés suivantes :

a) *Une courbe de genre* π *tracée sur une surface* F *appartient à un système complet de degré* $2\pi - 2$.

b) *Il n'existe pas de faisceau irrationnel de courbes tracées sur une surface* F.

Une surface algébrique F n'est certainement pas référable (par une transformation birationnelle) à une surface réglée, car alors elle posséderait un faisceau irrationnel de courbes rationnelles. Elle ne peut non plus être rationnelle, car alors elle ne posséderait pas la propriété *a).* Nous pouvons donc supposer que la surface F est dépourvue de courbes exceptionnelles sans nuire à la généralité [1].

Si la surface F *possède une courbe* i — *canonique* L, *cette courbe est d'ordre zéro.*

Pour démontrer ce théorème, considérons un système linéaire $|C|$, de genre π et par conséquent de degré $2\pi - 2$, dont la dimension soit au moins égale à trois. Soit $|C'|$ le sytème adjoint à $|C|$. On a, par définition :

$$i\,C' \equiv L + i\,C.$$

[1] Castelnuovo et Enriques. *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche.* Annali di Matematica, 1901, (3), VI.

Or, une courbe C' rencontre une courbe C en un groupe canonique, donc composé de $2\pi - 2$ points. Par suite, toute courbe C rencontre L en zéro points et L est donc bien d'ordre zéro. Par conséquent, le i — genre P_i de F est au plus égal à un.

En particulier, le genre géométrique p_g peut prendre les valeurs 0 ou 1, et le genre arithmétique p_a ($\leqslant p_g$) les valeurs — 1, 0 ou 1[1]. Remarquons qu'on ne peut avoir $p_g - p_a = 1$, car une surface possédant l'irrégularité un contient, d'après M. Castelnuovo[2], un faisceau elliptique de courbes. Si l'on avait $p_g - p_a = 1$, la surface F ne posséderait donc pas la propriété *b*).

Rappelons-nous maintenant que si $P_i = 1$, on a $P_{ij} = 1$, j étant un entier quelconque. D'autre part, une surface pour laquelle on a $p_a = P_2 = 0$ est rationnelle (Castelnuovo). La surface F rentrera donc dans l'une ou l'autre des trois catégories suivantes :

A) $p_a = p_g = P_2 = \ldots = P_4 = \ldots = 1.$
B) $p_a = -1,\ p_g = \ldots = P_4 = \ldots = 1.$
C) $p_a = p_g = 0,\ P_2 = P_4 = P_6 = \ldots = 1,\ P_3 = P_5 = \ldots = 0.$

2. — Les surfaces de la catégorie A) sont caractérisées, d'aprés M. Enriques[3], par la propriété $p_a = P_4 = 1$. Leur genre linéaire est $p^{(1)} = 1$.

Un système linéaire complet $|C|$, de genre π et de degré $2\pi - 2$, tracé sur une telle surface, a la dimension π.

[1] On sait qu'une surface de genre $p_a < -1$ possède un faisceau de genre p_a de courbes rationnelles. Voir Enriques. *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero.* Rend. del Circ. Matem. di Palermo, 1905, vol. xx.

[2] *Sugli integrali semplici appartenenti ad una superficie irregolorre.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, 1e sem. 1905, s. (5), vol. xiv.

[3] *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Rend. della R. Accad. di Bologna, 1907.

il est son propre adjoint, c'est-à-dire que la série caractéristique d'une courbe C est la série canonique complète.

Nous désignerons généralement les surfaces de la catégorie A) par l'expression : *surfaces de genres un.*

3. — Les surfaces de la catégorie B) sont définies, comme M. Enriques l'a montré[1], par les égalités $p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$.

Un système linéaire complet $|C|$, de genre π et de degré $2\pi - 2$, tracé sur une pareille surface, a la dimension $\pi - 2$. Il est son propre adjoint et la série caractéristique d'une courbe C est donc une série de défaut deux contenue dans la série canonique de C. Le système $|C|$ appartient à un système continu ∞^2. Ces surfaces ont le genre linéaire $p^{(1)} = 1$.

Ces surfaces ont été rencontrées par M. Picard parmi celles qui admettent un groupe continu de transformations birationnelles elles-mêmes. Suivant l'usage, nous les désignerons par : *surfaces de Picard.*

4. — Les surfaces de la catégorie C) ont été étudiées par MM Enriques[2] et Fano[3]. Elles sont caractérisées par les égalités $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. Leur genre linéaire est $p^{(1)} = 1$.

Un système linéaire $|C|$, complet, de genre $\pi > 1$ et de degré $2\pi - 2$, a la dimension $\pi - 1$. La série caractéristique d'une courbe C est non spéciale et d'ailleurs complète. Le système $|C|$ admet un système adjoint $|C'|$, de genre π et de degré $2\pi - 2$. Le système $|C|$ est à son tour l'adjoint de $|C'|$, de telle sorte que l'on a :

$$|2C| = |2C'|.$$

[1] *Superficie algebriche di genere* $p^{(1)} = 1$, loc. cit.

[2] *Sopra le superficie algebriche di bigenere uno.* Memorie della Societa italiana delle Science, 1907, (3), XIV.

[3] *Superficie algebriche di genere uno, e loro casi particolari*. Rend. del Circ. Matem. di Palerma, 1910, XXIX.

Il existe sur ces surfaces, des faisceaux de courbes elliptiques et des courbes elliptiques isolées.

Ces surfaces seront appelées : *surfaces de bigenre un.*

5. — Considérons une involution I_n appartenant à une surface F vérifiant les conditions *a*), *b*), c'est-à-dire une variété continue doublement infinie de groupes de n points de F telle qu'un point de F appartienne à un seul groupe (en général).

Soit Φ une surface représentative de l'involution I_n, c'est-à-dire une surface dont les points sont en correspondance birationnelle avec les groupes de I_n.

Si nous désignons par p_a, p_g, P_2, . . . les genres de F, par π_a, π_g, Π_2, . . . ceux de Φ, nous savons que l'on doit avoir

$$\pi_g - \pi_a \leqslant p_g - p_a, \quad \pi_g \leqslant p_g, \quad \Pi_2 \leqslant P_2, \ldots.$$

On peut donc toujours avoir, que F appartienne à l'une quelconque des catégories A, B, C, $\pi_a = \Pi_2 = 0$. L'involution I_n est alors rationnelle. Nous exclurons ce cas.

Lorsque F est une surface de Picard, on peut avoir $\pi_a = -1$, $\pi_g = 0$ ou $\pi_a = 0$, $\pi_g = 1$, de telle sorte que la surface Φ possède un faisceau irrationnel de courbes. Nous exclurons encore ces deux cas.

La surface Φ, c'est-à-dire l'involution I_n, est maintenant caractérisée lorsque la surface F l'est.

Si F est une surface de genres un, Φ peut être de genres un ou de bigenre un.

Si F est une surface de Picard, Φ est une surface de Picard, ou de genres un, ou de bigenre un.

Si F est une surface de bigenre un, Φ est une surface de bigenre un.

6. — Considérons un système $|\Gamma|$ de Φ et soit $|\Gamma'|$ son système adjoint. Quelle que soit la catégorie à laquelle Φ appartient, on a toujours $|2i\Gamma| = |2i\Gamma'|$,

pourvu que i soit un nombre positif entier. La courbe $2i$ — canonique de Φ, d'ordre zéro, peut donc être représentée par $2i\Gamma - 2i\Gamma$. Soit $| C |$ le système, composé avec I_n, qui correspond sur F au sytème $| \Gamma |$. A la courbe $2i$ — canonique de Φ correspond donc la courbe $2iC - 2iC$ sur F. Supposons que l'involution I_n possède une courbe de coïncidence D. Alors, d'après un théorème bien connu, dû à M. Enriques, la courbe $2iC - 2iC + 2iD$ est une courbe $2i$ — canonique de F. Or, une pareille courbe est d'ordre zéro, donc la courbe de coïncidence D est d'ordre zéro. En d'autres termes, *L'involution* I_n *ne possède, sur la surface* F, *qu'un nombre fini de points de coïncidence.*

CHAPITRE II

Un théorème général sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence.

7. — Nous allons établir, dans ce chapitre, un théorème général sur les involutions appartenant à une surface algébrique et dotées d'un nombre fini de points de coïncidence, lorsqu'il existe, sur la surface certains systèmes que nous définirons plus loin. Nous appliquerons ensuite ce théorème aux surfaces et aux involutions envisagées au chapitre précédent.

Soit F une surface algébrique qui n'est ni rationnelle ni référable (point par point) à une réglée. Supposons que sur F il existe une involution I_n, d'ordre n, ne possédant qu'un nombre fini de coïncidences. Cette involution détermine, sur F, une correspondance (n — 1. n — 1) entre les points de cette surface, les n — 1 points correspondants à un point donné étant ceux qui font partie du groupe de I_n définit par ce point.

Nous faisons les deux suppositions suivantes :

a) L'involution I_n n'est ni cyclique, ni composée avec une involution cyclique, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de transformation birationnelle de F en elle-même laissant invariant chaque groupe de I_n.

b) Il existe sur F un système complet $\{ C \}$, simple, dépourvu de points-bases, tels que les courbes transformées des C au moyen de la correspondance (n — 1, n — 1) définie par I_n, appartiennent à un système continu complet dont la dimension surpasse celle de $\{ C \}$.

Nous allons montrer que ces hypothèses sont contradictoires.

8. — Désignons par K les courbes transformées des courbes C au moyen de la transformation $(n-1,\ n-1)$ définie par I_n. L'involution I_n n'étant ni cyclique, ni composée avec une involution cyclique, les courbes K ne sont pas réductibles en $n-1$ courbes. Pour fixer les idées, supposons les courbes K irréductibles.

Par hypothèse, les courbes K appartiennent (comme courbes totales) à un système continu complet $\{ K \}$ dont la dimension surpasse celle de $\{ C \}$.

Soit K_1 une courbe de $\{ K \}$ qui ne soit pas la transformée d'une courbe C. Au moyen de la transformation $(n-1, n-1)$, il correspondra à K_1 une certaine courbe Γ. Nous supposerons cette courbe Γ irréductible. Les groupes de I_n dont un point se trouve sur K_1 ont donc $n-1$ points sur Γ.

Faisons varier la courbe K_1 d'une façon continue et faisons la tendre vers une courbe K conjugée d'une C. La courbe Γ variera d'une manière continue et tendra vers la courbe composée $(n-2)\,K + C$. Nous allons montrer que cela n'est possible que si une courbe C générique possède des points de coïncidence. Pour ce faire, nous utiliserons le même raisonnement que MM. Enriques et Severi dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*.

Au lieu de la surface F, nous considérons la variété riemannienne à quatre dimensions qui représente les points réels et imaginaires de cette surface. Au lieu des courbes C, K, K_1, Γ, nous considèrerons donc des surfaces de Riemann que nous désignerons toujours par les mêmes lettres.

Désignons par x_1, x_2, . . ., x_n les n points d'un groupe de I_n et supposons, pour fixer les idées, que lorsque le point x_1 décrit une courbe C, les $n-1$ points x_2, . . ., x_n décrivent la courbe K correspondante. Supposons encore que lorsque le point x_2 décrit K_1, les $n-1$ points x_1, x_3, . . ., x_n décrivent Γ.

Faisons décrire au point x_2, sur la surface de Riemann K_1, un cycle σ, tel que, sur Γ, les points x_1 et x_3 soient échangés entre eux, ce qui est toujours possible si Γ est irréductible.

Lorsque la surface de Riemann K_1 varie d'une manière continue, le cycle σ_1 se déforme continuement. Il est toujours possible de choisir les surfaces de Riemann K_1 et K de manière que K_1 puisse tendre vers K sans qu'il y ait abaissement de la connexion linéaire de cette surface de Riemann. C'est de cette façon que nous considérerons la variation de K_1 vers K dans la suite. Quand K_1 tend vers K, σ_1 tend vers un cycle σ de K, décrit par x_2. Et lorsque x_2 décrit σ, il faut nécessairement, à cause de la continuité, que les points x_1, x_3 soient échangés entre eux.

Mais actuellement, Γ se réduit à la surface de Riemann réductible $(n-2)$ K + C. Le point x_1 se trouve sur C et le point x_3 sur K d'après la convention faite plus haut. Lorsque x_2 décrit le cycle σ, x_1 passe sur K, x_3 sur C de manière à s'échanger entre eux. Mais cet échange ne peut se faire qu'en un point commun à C et K. En un tel point, il y aurait donc deux déterminations x_1, x_3 confondues, c'est-à-dire que l'on aurait, sur la courbe C, un point de coïncidence de l'involution I_n.

La courbe C appartenant à un système dépourvu de points-bases et l'involution I_n n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences, C ne contiendra en général aucun de ces points. L'absurdité à laquelle nous parvenons provient de ce que nous avons supposé Γ irréductible. L'analyse précédente montre que la courbe Γ se décompose en deux courbes Γ_1, Γ_2 dont l'une, Γ_1, n'est parcourue que par le point x_1.

Pour atteindre le plus grand degré de généralité possible, supposons que l'involution I possède sur la surface F un point fondamental a dont la courbe fondamentale correspondante soit A. On pourrait se demander si, lorsque K_1 tend vers K, Γ_1 ne tend pas vers la courbe $C + A$. Cela est impossible, car alors K_1 tendrait vers K augmentée d'un certain nombre de fois le point a (considéré comme courbe exceptionnelle). Donc lorsque K_1 tend vers K, Γ_1 tend vers C.

Γ_1 tendant d'une manière continue vers C et le système $\{ C \}$ étant supposé complet, il résulte que Γ_1 ne peut être qu'une courbe C. Mais alors, la courbe composée $K_1 + \Gamma_2$ est une courbe K. Cela est absurde puisque K et K_1 appartiennent, par hypothèse, au même système comme courbes totales. Par conséquent, l'hypothèse faite sur les courbes K, à savoir qu'elles sont irréductibles, nous conduit à une absurdité.

Les courbes K sont d'ailleurs réductibles en $n - 1$ courbes, car si elles étaient réductibles en moins de $n - 1$ courbes, il y aurait une de ces courbes partielles sur laquelle se trouveraient plus d'un point des groupes de I_n (dont un point est sur C). On recommencerait dans ce cas le raisonnement précédent et on parviendrait encore à une absurdité.

Nous parvenons donc à cette conclusion que les courbes C sont transformées par I_n en des groupes de $n - 1$ courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, c'est-à-dire que I_n est cyclique ou composée avec une involution cyclique. Les deux hypothèses faites au début sont donc contradictoires.

Tout cela nous permet d'énoncer ce théorème :

Etant donnés sur une surface algébrique une involution n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence et un système continu complet, simple, sans points-bases, tel que les transformées de ses courbes au moyen de l'involution, appartiennent à un système continu dont la dimension surpasse celle du système donné, l'involution est cyclique ou composée avec une involution cyclique.

9. — Nous allons appliquer le théorème précédent aux surfaces considérées dans le chapitre I.

Soit en premier lieu F une surface de genres un sur laquelle on donne une involution I_n n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence.

Considérons sur F un système complet $| C |$, de genre $\pi > 1$, de degré $2\pi - 2$ et de dimension π, simple. Ce système n'aura pas de points-bases, car la série caractéristique d'une quelconque de ses courbes est la série canonique et cette série n'a pas de point fixe. Soit K la courbe générique transformée d'une courbe C au moyen de la transformation $(n-1, n-1)$ définie par I_n. Le genre ξ de K s'évalue au moyen de la formule de Zeuthen appliquée à la transformation $(1, n-1)$ entre C et K. On trouve :

$$\xi \geqslant (n-1)\ (\pi-1)+1,$$

c'est-à-dire $\xi \geqslant \pi + 1$ puisque π est supérieur à un et que l'on peut supposer n supérieur à deux.

La courbe K engendre un système continu $\{ K \}$ dont les courbes ont les mêmes points multiples fixes et variables que la courbe K transformée d'une C. Il nous faut montrer que le système $\{ K \}$ a la dimension supérieure à π.

Les courbes de $\{ K \}$ infiniment voisines d'une K générique, découpent sur celle-ci la série caractéristique complète[1]. Or, dans le cas actuel, cette série caractéristique est la série canonique d'ordre $2\xi - 2$ et de dimension $\xi - 1$. La dimension de $\{K\}$ est donc au moins égale à ξ, donc elle est supérieure à π.

Par conséquent, une involution n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence sur une surface de genres un, est cyclique ou composée avec une involution cyclique[2].

Supposons en second lieu que nous ayons une involution I_n, dotée d'un nombre fini de coïncidences, sur une surface de Picard F.

Soit, sur F, un système continu complet $\{C\}$, de genre $\pi > 1$, de dimension π et de degré $2\pi - 2$. Supposons ce système simple. Il est nécessairement dépourvu de points-bases, car les courbes infiniment voisines de C, appartenant à $\{C\}$, découpent la série canonique, et celle-ci est dépourvue de points-fixes.

Le genre ξ de la courbe K transformée d'une courbe C au moyen de I_n s'évalue comme tantôt au moyen de la formule de Zeuthen. On trouve encore $\xi \geqslant \pi + 1$.

Les courbes infiniment voisines d'une courbe K quelconque, dans le système continu complet $\{K\}$, découpent sur cette courbe la série caractéristique complète, c'est-à-dire la série canonique d'ordre $2\xi - 2$ et de dimension $\xi - 1$. Par conséquent, la dimension de $\{K\}$ est au moins égale à ξ, c'est-à-dire supérieure à celle, π, de $\{C\}$.

Ainsi, une involution n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence sur une surface de Picard, est cyclique ou composée avec une involution cyclique[3].

[1] ENRIQUES. *Sulla proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari.* Rend. della R. Accad. di Bologna, 1905.

[2] C'est là le théorème de M. Enriques.

[3] C'est le théorème de MM. Enriques et Severi.

Enfin, considérons le cas d'une involution I_n, ayant un nombre fini de points de coïncidence, sur une surface de bigenre un, F.

Soit $| C |$ un système complet de genre $\pi > 1$, de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi - 1$. Supposons ce système simple et dépourvu de points-bases[1]. Soit $\{ K \}$ le système continu complet engendré par les courbes K transformées des courbes C.

Le genre ξ des K s'évalue toujours au moyen de la formule de Zeuthen. On trouve encore $\xi \geqslant \pi + 1$.

D'après le théorème de M. Enriques déjà employé précédemment, les courbes de $\{ K \}$ infiniment voisines à une courbe K générique marquent sur celle-ci la série caractéristique complète, c'est-à-dire, actuellement, une série d'ordre $2\xi - 2$ et de dimension $\xi - 2$. La dimension de $\{ K \}$ est donc au moins égale à $\xi - 1$; elle est donc supérieure à celle, $\pi - 1$, de $| C |$.

Une involution n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences, sur une surface de bigenre un, est cyclique ou composée avec une involution cyclique.

Nous pouvons réunir en un seul les trois énoncés qui viennent d'être établis.

Si sur une surface algébrique dépourvue de faisceaux irrationnels de courbes et sur laquelle un système complet de genre π *a le degré* $2\pi - 2$, *il existe une involution dotée d'un nombre fini de points de coïncidence, cette involution est cyclique ou composée avec une involution cyclique.*

---

[1] M. Enriques a établi que sur une surface de bigenre un, un système dont les courbes ne sont pas hyperelliptiques, est dépourvu de points-bases (*superficie di bigenre uno*, loc. cit.)

CHAPITRE III

Facteurs premiers de l'ordre des involutions.

10. — Soient F une surface algébrique dépourvue de faisceaux irrationnels de courbes et sur laquelle un système complet de genre π a le degré $2\pi - 2$, I_n une involution d'ordre n, sur F, dotée d'un nombre fini de points de coïncidences.

D'après ce que nous avons établi, l'involution I_n est cyclique ou composée avec une involution cyclique.

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_2$ les facteurs premiers de n, de sorte que $n = p_1 p_2 \ldots p_2$. Supposons que I_n soit composée avec une involution cyclique I_r, d'ordre $r = p_1 p_2 \ldots p_\beta$ $(\beta \leqslant 2)$.

Considérons une surface Φ_β représentative de l'involution I_r, de sorte qu'entre Φ_β et F, nous avons une correspondance $(1, p_1 \ldots p_\beta)$.

A un groupe de I_n correspond, sur Φ_β, un groupe de $\dfrac{n}{r} = p_{\beta+1} \ldots p_\alpha$ points, et l'ensemble de ces groupes forment une nouvelle involution I_s $(s = p_{\beta+1} \ldots p_\alpha)$. Cette involution I_s ne peut d'ailleurs avoir qu'un nombre fini de coïncidences, car à une de ces coïncidences correspond sur F une coïncidence de I_n.

Considérons la transformation birationnelle T, de F en elle-même, de période r, qui engendre l'involution cyclique I_r.

La transformation $T^{p_2 \ldots, p_\beta}$ a la période p_1. En effet, on a :

$$(T^{p_2 \ldots p_\beta})^{p_1} = T^r = 1.$$

Cette transformation engendre une involution d'ordre p_1. Soit Φ_1 une surface représentative de cette involution. Entre Φ_1 et F, nous avons donc une transformation $(1, p_1)$. A un groupe de I_r correspond sur Φ_1 un groupe de $p_2 \ldots p_\beta$ points, de sorte qu'entre les surfaces Φ_β et Φ_1 on a une correspondance $(1, p_2\, p_3 \ldots p_\beta)$.

Considérons maintenant la transformation $T^{p_3 \ldots p_\beta}$; elle a la période $p_1\, p_2$ et engendre une involution d'ordre $p_1\, p_2$. Soit Φ_2 une surface représentative de cette involution. Entre Φ_2 et F, on a une correspondance $(1, p_1\, p_2)$, entre Φ_2 et Φ_β, une correspondance $(1, p_3 \ldots p_\beta)$, et, entre Φ_2 et Φ_1, une correspondance $(1, p_2)$. En continuant de la sorte, nous formerons une suite de surfaces $\Phi_0 \equiv F$, $\Phi_1, \ldots\ldots, \Phi_\beta$ telles que Φ_i et Φ_{i-1} sont en correspondance $(1, p_i)$ et Φ_{i+1}, Φ_i en correspondance $(1, p_{i+1})$.

Nous raisonnerons sur l'involution I_s existant sur Φ_β comme nous avons raisonné sur I_n. Nous parviendrons ainsi à une suite de surfaces.

$$\Phi_0 \equiv F, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}, \Phi_k, \Phi_{k+1}, \ldots, \Phi_\alpha.$$

Entre Φ_k et Φ_{k-1}, on a une correspondance $(1, p_k)$, entre Φ_{k+1} et Φ_k une correspondance $(1, p_{k+1})$, les quantités $p_1, \ldots, p_\alpha$ étant des nombres premiers.

Désignons par $p_a^{(k)}, p_g^{(k)}, P_2^{(k)}, \ldots\ldots, P_i^{(k)}, \ldots$ les genres de la surface Φ_k. Nous avons :

$$p_g^{(\alpha)} - p_a^{(\alpha)} \leqslant \ldots\ldots\ldots \leqslant p_g^{(k)} - p_a^{(k)} \leqslant \ldots\ldots \leqslant p_g^{(0)} - p_a^{(0)},$$

$$p_g^{(\alpha)} \leqslant \ldots\ldots \leqslant p_g^{(k)} \leqslant \ldots\ldots \leqslant p_g^{(o)},$$

$$P_i^{(\alpha)} \leqslant \ldots \leqslant P_i^{(k)} \leqslant \ldots\ldots \leqslant P_i^{(o)}.$$

Rappelons-nous que l'on a toujours, pour la surface F et pour l'involution I_n, les plurigenres d'ordre pair égaux à l'unité. Par suite, $P_{2i}^{(\alpha)} = \ldots = P_{2i}^{(k)} = \ldots = P_{2i}^{(o)} = 1$.

Je dis maintenant que toutes les surfaces de la série construite sont ou des surfaces de genres un, ou des surfaces de Picard, ou des surfaces de bigenre un.

Ces surfaces ne sont certainement pas rationnelles, puisque leur bigenre est égal à un ; elles ne sont pas non plus réglées, car leur quadrigenre et leur sextigenre sont égaux à un[1]. Il nous suffira donc de prouver que l'une de ces surfaces, par exemple Φ_k, ne peut avoir l'irrégularité un.

Si l'on a $p_g^{(k)} - p_a^{(k)} = 1$, on a nécessairement $p_g^{(o)} - p_a^{(o)} = 2$, $p_g^{(\alpha)} - p_a^{(\alpha)} = 0$, car ni la surface F, ni la surface Φ_α qui représente l'involution I_n, ne peuvent avoir l'irrégularité un par hypothèse.

Deux cas peuvent se présenter à priori :

a) $p_g^{(k)} = 1$, $p_a^{(k)} = 0$.

b) $p_g^{(k)} = 0$, $p_a^{(k)} = -1$; $p_g^{(\alpha)} = p_a^{(\alpha)} = 0$, $P_2^{(\alpha)} = P_4^{(\alpha)} = 1$.

Le premier cas conduit à une absurdité. En effet, M. Enriques a montré qu'une surface de genres $p_g = 1$, $p_a = 0$ possède toujours une courbe canonique effective,

[1] M. Enriques a en effet démontré que pour qu'une surface soit réglée, il faut et il suffit que l'on ait $P_4 = P_6 = 0$. Voir le Mémoire *Sulle superficie algebriche di genere geometrico zéro*. Rend. del Cir. di Palermo, 1905, xx.

d'ordre plus grand que zéro[1]. Dans la correspondance $(1, p, p_2 \ldots p_k)$ entre Φ_k et F, la courbe canonique de Φ_k serait transformée en une courbe canonique de F. Or, F étant une surface de Picard (dépourvue de courbes exceptionnelles), ne peut contenir une courbe canonique d'ordre supérieur à zéro.

Dans le second cas, Φ_α est une surface de bigenre un. Φ_k possède un faisceau elliptique de courbes elliptiques $\{ C \}$[2]. A une de ces courbes correspond, sur Φ_α une courbe elliptique C'. Soit T une transformation birationnelle de Φ_k en elle-même, engendrant l'involution d'ordre $p_{k+1} \ldots . p_\alpha$ existant sur Φ_k (ou une involution avec laquelle la première est composée). Il faut nécessairement que T laisse $\{ C \}$ invariant, car Φ_k ne peut posséder plus d'un faisceau elliptique. D'autre part, T ne peut laisser chaque courbe C invariante, car alors les C' formeraient un faisceau elliptique, ce qui est impossible

$$(p_g^{(\alpha)} - p_a^{(\alpha)} = 0).$$

Donc T transforme une C en une C. Il en résulte que la courbe C' engendre un faisceau (linéaire) et est birationnellement identique à C. Or, toutes les courbes du faisceau $\{ C \}$ sont birationnellement identiques, il en est donc de même des courbes C'.

Cela nous permet de calculer l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ_α. On a $I = -4$. Mais d'autre part, on a $I = 12\, p_a^{(\alpha)} + 9 - p^{(1)}$, $p^{(1)} = 1$, donc $I = 8$. L'hypothèse b) nous conduit donc également à une absurdité.

Par suite, les surfaces Φ_k ne peuvent avoir l'irrégularité un. En d'autres termes,

Les surfaces de la suite F, $\Phi_1, \ldots, \Phi_k, \ldots, \Phi_\alpha$ *sont des*

[1] *Intorno alle superficie algebriche di genere lineare* $p^{(1)} = 1$. Rend. della R. Accad. di Bologna, 1907.

[2] ENRIQUES, *Superficie di genere zero*, loc. cit.

surfaces de genres un, ou des surfaces de Picard, ou des surfaces de bigenre un.

Pour voir quels sont les facteurs premiers que peut admettre l'ordre n de I_n, nous pourrons donc considérer une involution d'ordre premier, dotée d'un nombre fini de coïncidences, sur la surface F, et chercher les valeurs possibles de ce nombre premier.

11. — Soit donc sur la surface F une involution I_p, d'ordre premier p, dotée d'un nombre fini x de points de coïncidences. Soit Φ une surface représentative de cette involution. Nous allons d'abord construire un modèle projectif de Φ.

Considérons sur F un système complet $\{ C_1 \}$, de genre supérieur à un, simple et dépourvu de points-bases.

Désignons par T la transformation birationnelle de F en elle-même, de période p, qui engendre I_p.

Les transformations T, $T^2, \ldots, T^p$ changent $\{ C_1 \}$ en des systèmes $\{ C_2 \}, \{ C_3 \}, \ldots, \{ C_p \}$ qui peuvent d'ailleurs coïncider avec le premier. Considérons le système complet

$$\{ A \} = \{ C_1 + C_2 + \ldots + C_p \}.$$

Il est clair que T transformera une courbe A en une courbe A. *Un tel système sera dit système invariant.*

Le système $\{ A \}$ est dépourvu de points-bases, car un pareil point serait aussi un point-base de $\{ C_1 \}$, ce qui est contre l'hypothèse.

Le système $\{ A \}$ est simple. En effet, $\{ C_1 \}$ étant simple, $\{ A \}$ ne pourrait être composé qu'avec l'involution I_p. Soit π le genre d'une courbe A. Le genre d'une courbe C_1 étant supérieur à un, le genre π de A sera supérieur à quatre.

Si $\{ A \}$ était composé avec I_p, à ce système correspondrait, sur Φ, un système $\{ A^* \}$ de degré $\frac{1}{p}(2\pi - 2)$, dont la dimension r serait la même que celle de $\{A\}$. Or, la dimension r de $\{A\}$ est $r \geqslant \pi - 1$. Celle de $\{A^*\}$ est $r \leqslant \dfrac{\pi - 1}{p} + 1$, donc on aurait :

$$\pi - 1 \leqslant \frac{\pi - 1}{p} + 1 \qquad (\pi > 4).$$

Cela est impossible, donc $\{A\}$ ne peut être composé avec I_p.

De ceci, il résulte que nous pouvons considérer, sur F, un système complet $\{A\}$, de genre $\pi > 1$, de degré $2\pi - 2$, de dimension r ($\pi - 1 \leqslant r \leqslant \pi$), simple, sans points-bases et invariant.

Soient A_1 une courbe de ce système, $A_2, A_3, \ldots, A_p$ les transformées de A_1 au moyen de $T, T_2, \ldots, T^{p-1}$. Ces courbes appartiennent donc aussi à $\{A\}$.

A la courbe A_1 correspond, sur Φ, une courbe Γ de genre effectif π. Cette courbe Γ possède des points doubles en chaque point de Φ auquel correspondent deux points de A_1. On détermine aisément le nombre de ces points.

Soit M un point commun à la courbe A_1 et à la courbe A_i ($i \leqslant p$). T^{p-i+1} transforme en A_1 en A_{p-i+2} et A_i en A_1. Par conséquent T^{p-i+1} transforme M en un point M' commun aux courbes A_1 et A_{p-i+2}. Les points M, M' forment un couple de points de A_1 auquel correspond un seul point de Φ. Le nombre de couples analogues est égal à $(p-1)(\pi-1)$ et il n'existe évidemment pas d'autres couples en dehors de ceux-là. Par suite, la courbe Γ possède $(p-1)(\pi-1)$ points doubles. Son genre virtuel est donc égal à $\pi + (p-1)(\pi-1) = p(\pi-1) + 1$.

La courbe Γ définit, sur Φ, un système linéaire $|\Gamma|$, de genre $p(\pi-1)+1$, de degré $2p(\pi-1)$, et de dimension ρ ($p[\pi-1] < \rho \leqslant p[\pi-1]+1$). Aux courbes Γ correspondent sur F des courbes C qui vérifient évidemment l'équation fonctionnelle

$$C \equiv A_1 + A_2 + \ldots + A_p \equiv pA.$$

Ces courbes C forment un système linéaire de degré $2p^2(\pi - 1)$, de genre $p^2(\pi - 1) + 1$ et de dimension ρ. C'est donc un *système incomplet.*

Chaque courbe C est changée en elle-même par T, ce que nous exprimons en disant que C est *une courbe invariante.*

Le système $|\Gamma|$ est simple et dépourvu de points-bases.

Supposons, en effet, que $|\Gamma|$ ne soit pas simple. Alors les courbes Γ passant par un point N, passeront au moins par un second point N'. Les courbes C passant par un des correspondants de N sur F passera par les correspondants de N'. Il en sera ainsi pour la courbe C particulière $A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_p$. Mais alors, les courbes A, passant par un des correspondants de N passeraient en conséquence par un second point (correspondante de N'). Le système $\{A\}$ ne serait donc pas simple, comme on l'a supposé. $|\Gamma|$ est donc simple.

Supposons que $|\Gamma|$ a des points-bases. Alors $|C|$ et par suite $\{A\}$ ont aussi des points-bases, ce qui est impossible.

Rapportons projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire S_ρ à ρ dimensions. On obtient une surface birationnellement identique à Φ, donc représentative de l'involution I_p, que nous désignerons toujours par Φ.

La surface Φ a donc maintenant l'ordre $2p(\pi - 1)$ et ses sections hyperplanes Γ ont le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Remarquons que la surface Φ ne peut avoir des points multiples occasionnels [1] d'indice supérieur à deux. L'existence de pareils points porteraient en effet à l'existence,

[1] C'est-à-dire des points multiples en dehors des courbes multiples éventuelles de la surface,

sur Φ, de systèmes linéaires de dimension $\rho - 1$ et de genre inférieur d'au moins trois unités à $p(\pi - 1) + 1$.

Pour la même raison, Φ ne peut avoir de points doubles tacnodaux (c'est-à-dire ayant une droite double dans le domaine du premier ordre).

12. — Soit P un point de coïncidence de l'involution I_p sur F. P est transformé en lui-même par T, donc P, compté p fois, forme un groupe de I_p. Soit P' le point de diramation correspondant sur Φ.

Comment la transformation T agit-elle sur les points du domaine du premier ordre du P? Elle peut laisser ces points invariants ou non.

Plaçons-nous dans la première hypothèse.

Considérons une courbe A passant par P. Soit A_1 cette courbe. Les courbes A_2, A_3, . . . , A_p que les transformations T, T^2,. . . ., T^p font correspondre à A_1 passent par P et par le point infiniment voisin de P situé sur A_1, c'est-à-dire qu'elles touchent A_1 en P. Nous obtenons une courbe C particulière, soit C', ayant en P deux points p — uples infiniment voisins.

Formons une seconde courbe analogue C''.

Les courbes C', C'' déterminent un système linéaire de courbes C ayant en P un point p — uple à tangentes distinctes et variables. Nous désignerons par C_2 ces courbes et par Γ_2 les courbes Γ qui leur correspondent sur Φ.

Les courbes Γ_2 forment aussi un système linéaire $|\Gamma_2|$ dont nous désignerons par γ le degré virtuel.

Entre une courbe Γ_2 et la C_2 correspondante, on a une correspondance $(1, p)$. L'involution déterminée par cette correspondance sur la C_2 est cyclique et possède, par hypothèse p points de coïncidence infiniment voisins de P.

Appliquons la formule de Zeuthen à cette correspondance. On obtient, le genre de C_2 étant

$$p^2 (\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2} p (p - 1),$$

$$p \gamma + p (p - 1) = 2 p^2 (\pi - 1) - p (p - 1).$$

On a donc

$$\gamma = 2 p (\pi - 1) - 2 (p - 1).$$

Le degré effectif de $| C_2 |$ est égal à $2 p^2 (\pi - 1) - p^2$, donc le degré effectif de $| \Gamma_2 |$ est égal à $2 p (\pi - 1) - p$. Mais le degré virtuel d'un système linéaire est au moins égal à son degré effectif, donc on doit avoir

$$\gamma \geqslant 2 p (\pi - 1) - p.$$

Cela donne $p = 2$. Donc la transformation T ne laisse invariants les points infiniment voisins de P que si l'on a $p = 2$.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse opposée. La transformation T ne laisse pas invariants les points infiniment voisins de P, mais elle détermine entre ces points, ou si l'on veut entre les directions issues de P, une involution cyclique d'ordre p. Il y a donc deux directions unies. Nous les désignerons par t_1, t_2.

Considérons une courbe de $\{ A \}$, soit A_1, touchant t_1 en P. T et ses différentes puissances changent A_1 en des courbes A_2, A_3, . . . , A_p touchant t_1, donc A_1, en P. La courbe $A_1 + A_2 + \ldots + A_p$ est une courbe C particulière, soit C′, ayant en P deux points p — uples infiniment voisins.

En opérant de même avec la direction t_2, on obtiendrait une seconde courbe C, soit C″, ayant la même propriété.

Les courbes C′, C″ déterminent un système linéaire de courbes C possédant en P un point p — uple ordinaire à tangentes variables. Nous désignerons encore ces courbes C par C_2 ; les courbes Γ correspondantes seront désignées par Γ_2 ; elles formeront aussi un système linéaire.

Entre une Γ_2 et la C_2 correspondante, nous avons une transformation $(1, p)$, mais lorsqu'un point de la C_2 tend vers P, ses $p - 1$ points conjugués tendent aussi vers P, mais sur les $p - 1$ autres branches respectivement. Il n'y a pas, par hypothèse, de coïncidences sur la C_2

Désignons par γ le degré virtuel de $|\Gamma_2|$ et appliquons la formule de Zeuthen. Nous obtenons

$$p\gamma = 2p^2(\pi - 1) - p(p - 1),$$

d'où

$$\gamma = 2p(\pi - 1) - p + 1.$$

Mais, d'après une propriété caractéristique de la surface Φ (voir Chapitre I), γ est pair, donc p doit être impair. Ainsi :

La transformation T *laisse invariants les points infiniment voisins de* P, *seulement si* p = 2 *et réciproquement.*

13. — Nous laisserons provisoirement de côté le cas $p = 2$ pour nous occuper uniquement du cas où p est impair. L'examen des points de coïncidence va nous montrer que l'on a $p = 3$. En même temps, nous déterminerons la singularité de la surface Φ en un point de diramation.

Soit P un point de coïncidence sur F et soit P′ le point de diramation correspondant sur Φ.

Considérons les courbes C passant par P ; elles forment un système linéaire de dimension $\rho - 1$ que nous désignerons par $|C_1|$. Les sections hyperplanes de Φ correspondantes seront désignées par Γ_1, elles passeront évidemment par P′.

Supposons que les courbes C_1 possèdent en P une certaine singularité abaissant le genre de i unités ; les C_1 auront donc le genre $p^2(\pi - 1) - i + 1$.

La transformation T engendre sur une courbe invariante C_1, une involution γ'_p, d'ordre p. Cette involution possède un certain nombre de points de diramation dans le voisinage de P. Nous indiquerons par δ le nombre de ces diramations. Puisqu'il s'agit d'une involution cyclique, retenons que δ est multiple de $p-1$ (ce qui exprime en même temps que δ est pair).

Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance entre une courbe C_1 et la Γ_1 correspondante.

Supposons d'abord que Φ n'a aucune singularité en P′. On a

$$p\,[2p\,(\pi-1)] + \delta = 2p^2\,(\pi-1) - 2i,$$

c'est-à-dire $\delta = i = o$. Cela est impossible, car $\delta = o$ exige que les C_1 aient en P un point multiple d'ordre kp (k entier), mais alors on n'aurait pas $i = o$. Par suite, P′ est un point multiple de Φ.

Nous avons vu que Φ ne peut admettre que des points doubles, donc P′ est double pour Φ. La formule de Zeuthen donne actuellement

$$p\,[2p\,(\pi-1)-2] + \delta = 2p^2\,(\pi-1) - 2i,$$

c'est-à-dire

$$\delta + 2i = 2p.$$

Deux solutions sont à priori possibles :

$$a)\quad \delta = p-1, \qquad i = \frac{1}{2}\,(p+1),$$

$$b)\quad \delta = 2\,(p-1), \quad i = 1.$$

Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse a). Alors, les courbes C_1 ont en P une multiplicité supérieure à deux. Il n'y a qu'un point de coïncidence dans le voisinage de P, donc une branche des C_1 touche l'une ou l'autre des directions unies t_1, t_2.

Considérons un point s'approchant de P sur une branche ne touchant ni t_1, t_2, d'une courbe C_1. Les $p-1$ points complétant le groupe de I_p s'approchent aussi de P et c'est certainement sur des branches différentes, sans quoi il y aurait des coïncidences, en dehors des directions t_1, t_2, dans le voisinage de P. Les courbes C_1 ont donc en P, kp (k entier) branches ne touchant ni t_1, ni t_2 ; c'est-à-dire que P est multiple d'indice, $kp + 1$ pour les C_1. Il en résulte que l'on doit avoir

$$i = \frac{1}{2}(kp+1)kp,$$

c'est-à-dire

$$kp(kp+1) = p + 1,$$

ce qui est impossible. L'hypothèse *a)* doit donc être rejetée.

Reste l'hypothèse *b)*. Alors, puisque $i = 1$, les C_1 ont un point double en P. Puisque $\delta = 2(p-1)$, il y a deux points de coïncidence dans le voisinage de P. Il faut donc que les C_1 aient en P un point double dont les deux branches touchent respectivement les directions t_1, t_2.

Nous avons vu que le point de diramation P′ est double pour Φ. Nous pouvons de plus affirmer que ce n'est pas un point double uniplanaire. En effet, au point infiniment voisin de P, dans la direction t_1 (ou t_2), compté p fois, correspond un point de Φ, infiniment voisin de P′. Les branches d'une courbe Γ_1 doivent donc passer par deux points infiniment voisins de P′, elles sont donc distinctes (en général) et P′ n'est pas uniplanaire.

Nous allons voir que P′ est biplanaire ordinaire et que l'on a $p = 3$. Pour cela, considérons les courbes C_1 assujetties à toucher en P une direction différente de t_1, t_2. Nous désignerons ces courbes par C'_2 et nous verrons qu'elles coïncident avec les C_2 rencontrées précédemment.

Les courbes C'_2 ont ordinairement en P un point de multiplicité supérieure à deux. Lorsqu'un point s'approche de P sur une branche d'une C'_2, les $p-1$ points qui complètent le groupe de I_p s'approchent également de P, mais sur des branches différentes, car il n'y a pas coïncidence en tout point infiniment voisin de P. Par suite, les courbes C'_2 ont en P un point multiple d'ordre $k\,p$ (k entier positif). Le genre des C'_2 est donc :

$$p^2\,(\pi-1)+1-\frac{1}{2}\,k\,p\,(k\,p-1).$$

Désignons par Γ'_2 les courbes de Φ correspondant aux C'_2. Les systèmes $|\,C'_2\,|$ et $|\,\Gamma'_2\,|$ ont la même dimension $\rho-2$. Aux $k\,p$ branches d'une courbe C'_2 correspondent k branches de la courbe Γ'_2 correspondante. Or, les courbes Γ'_2 ne peuvent avoir que deux branches au plus, car ces sections hyperplanes de Φ passent par un point infiniment voisin de P' et P' étant double, ce point est simple ou double. Par suite, on a $k=1$ ou $k=2$.

Supposons $k=2$. Alors, le système $|\,\Gamma'_2\,|$ a le degré virtuel $2\,p\,(\pi-1)-4$. Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance $(1,\,p)$ entre une Γ'_2 et la C'_2 correspondante. Il n'y a pas de coïncidences dans le voisinage de P sur C'_2, donc on a :

$$p\,[2\,p\,(\pi-1)-4]=2\,p^2\,(\pi-1)-2\,p\,(2\,p-1).$$

Cette équation se ramène à $2\,p=3$, ce qui est impossible. On ne peut donc avoir $k=2$. On a nécessairement $k=1$.

Lorsque $k=1$, les courbes C'_2 ont en P un point p — uple à tangentes variables et coïncident donc avec les C_2.

Au point double P' de Φ est infiniment voisin un point simple, de sorte que les courbes Γ'_2 (ou Γ_2) ont en P' un point de rebroussement. Le degré effectif de $|\,\Gamma_2\,|$ est égal à $2\,p\,(\pi-1)-3$ et le degré virtuel à $2\,p\,(\pi-1)-2$. P' est un point biplanaire ordinaire.

Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance existant entre une Γ_2 et la C_2 correspondante. On a

$$p\,[2p\,(\pi - 1) - 2] = 2p^2\,(\pi - 1) - p\,(p - 1),$$

c'est-à-dire $p = 3$.

En résumé :

Une involution d'ordre premier impair p *n'est possible que si* p $=$ 3. *En un point de diramation, la surface* Φ *possède un point double biplanaire ordinaire.*

14. — Revenons au cas $p = 2$ et cherchons quelle est la singularité de Φ en un point de diramation.

Appelons C_1 les courbes C passant par P, Γ_1 les sections hyperplanes correspondantes de Φ (passant par P').

Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance existant entre une Γ_1 et la C_1 correspondante, en adoptant les mêmes notations que précédemment. On a :

$$2\,[4\,(\pi - 1)] + \delta = 8\,(\pi - 1) - 2i$$

si P' est un point ordinaire pour Φ. Alors, on a : $\delta = i = o$, ce qui est impossible, car puisqu'en un point infiniment voisin de P, il y a coïncidence, on a toujours $\delta > o$.

Lorsque P' est un point double de Φ, on a

$$2\,[4\,(\pi - 1) - 2] + \delta = 8\,(\pi - 1) - 2\,i,$$

c'est-à-dire

$$\delta + 2\,i = 4.$$

On ne peut évidemment pas avoir $\delta = 4$, $i = o$, donc on a $\delta = 2$, $i = 1$. Les courbes C_1 ont en P un point double ordinaire.

Le système $|\,\Gamma_1\,|$ ayant la dimension $\rho - 1$, ses degrés effectif et virtuel sont tous deux égaux à $4\,(\pi - 1) - 2$. Par conséquent, le degré effectif de $|\,C_1\,|$ est égal $8\,(\pi - 1) - 4$. On en conclut que les tangentes des C_1 en P sont variables.

Le système $| C_1 |$ coïncide avec le système $| C_2 |$ rencontré dans la première partie du n° 12.

Aux deux points infiniment voisins de P sur les branches d'une C_1, chacun compté deux fois, correspondent deux points infiniment voisins de P′ situés respectivement sur chaque branche de la Γ_1 correspondante. Les Γ_1 ont donc un point double ordinaire en P′. Les tangentes des C_1 en P étant variables, il en est de même des Γ_1 et P′ est un point double conique de Φ.

Dans le cas d'une involution d'ordre deux, les points de diramation sont des points doubles ordinaires de la surface Φ.

15. — Nous allons actuellement rechercher le nombre x des points de diramation de la surface Φ.

Remarquons qu'un point double conique abaisse la classe d'une surface de deux unités, un point double biplanaire ordinaire de trois unités. Nous pouvons donc dire qu'en un point de diramation la surface Φ, représentative d'une involution I_p d'ordre p, a sa classe abaissée de p unités.

Cette remarque faite, calculons l'invariant de Zeuthen-Segre I de Φ. Pour cela, considérons un faisceau générique de sections hyperplanes Γ de Φ et désignons par m la classe effective de cette surface. Une formule bien connue nous donne

$$I' = m + px - 6p(\pi - 1) - 4.$$

Pour calculer l'invariant de Zeuthen-Segre I de la surface F, nous utiliserons le faisceau des courbes C qui correspondent aux courbes Γ du faisceau considéré tantôt sur Φ. A une courbe Γ ayant un point double en un point simple de Φ correspond une courbe C ayant p points doubles. Dans le faisceau considéré, il y aura donc m courbes C ayant p points doubles. Si nous nous rappelons de plus que les courbes C passant par un point de coïncidence (courbes C_1) ont en ce point un point double ordinaire, nous pouvons calculer I pour la formule connue. On a

$$I = p\,m + x - 6\,p^2\,(\pi - 1) - 4.$$

Entre ces deux relations, éliminons la quantité m. On obtient

$$(p^2 - 1)\,x = p\,(I' + 4) - (I + 4).$$

Evidemment, pour que nos résultats soient applicables, il faut que l'on ait $x > o$. En résumé,

Si sur la surface F, *nous avons une involution d'ordre* n, *dotée d'un nombre fini de coïncidences, nombre supérieur à zéro,* n *ne peut avoir que les facteurs premiers deux et trois.*

L'invariant de Zeuthen-Segre d'une surface est donné par la relation connue

$$I + p^{(1)} = 12\,p_a + 9.$$

Pour les surfaces considérées actuellement, on a $p^{(1)} = 1$, $p_a = -1, 0, 1$. Pour les surfaces de Picard, on a $I = -4$), pour les surfaces de genres un, $I = 20$, pour les surfaces de bigenre un $I = 8$. Etant données ces valeurs, nous pouvons dresser le tableau suivant :

NATURE DE F	NATURE DE Φ	VALEURS DE x POUR		
		$p=2$	$p=3$	p quelconque
$p_a = -1$. $p_g = P_4 = 1$,	$p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$,	0	0	0
$p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$,	$p_a = P_4 = 1$	16	9	imposs.
$p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$,	$p_a = p_g = o$, $P_6 = 1$	8	imposs.	imposs.
$p_a = P_4 = 1$,	$p_a = P_4 = 1$	8	6	imposs.
$p_a = P_4 = 1$,	$p_a = p_g = o$, $P_6 = 1$	0	imposs.	imposs.
$p_a = p_g = o$, $P_6 = 1$	$p_a = p_g = o$, $P_6 = 1$.	4	3	imposs.

Nous voyons donc que nos conclusions ne sont pas applicables aux involutions de Picard sur une surface de Picard. Cela était d'ailleurs bien connu[1].

Dans tous les autres cas, p peut prendre la valeur deux, mais il ne peut prendre la valeur trois quand il s'agit d'une involution de bigenre un sur une surface de Picard ou de genres un.

Paris, 21 mai 1913.

---

[1] Voir Traynard, *Sur les fonctions Théta....*, loc. cit., et Enriques et Severi, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*, loc. cit.

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS 3

CHAPITRE I. *Définitions et Propriétés des surfaces algébriques considérées. Involutions pouvant exister sur ces surfaces* 6

CHAPITRE II. *Un théorème général sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence* 11

CHAPITRE III. *Facteurs premiers de l'ordre des involutions* 18