Bulletin de la Classe des sciences

Systèmes canoniques de sections d'une variété de Segre

Lucien Godeaux

Résumé
On détermine les systèmes canoniques des sections de la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces linéaires à n dimensions.

Systèmes canoniques de sections d'une variété de Segre

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On détermine les systèmes canoniques des sections de la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces linéaires à n dimensions.

Nous considérons la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces linéaires à n dimensions, variété située dans un espace à $n(n+2)$ dimensions. Nous déterminons les systèmes canoniques des sections de cette variété par des espaces ayant au plus $n(n+1)-1$ dimensions. Chacune de ces sections est équivalente à une variété de l'espace à n dimensions représentée par une matrice de formes linéaires dont le système canonique est ainsi déterminé.

1. Considérons deux espaces linéaires à n dimensions (y), (z) et soient $y_0, y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées des points de l'espace (y), $z_0, z_1, \ldots, z_n$ celles d'un point de (z). Posons

$$X_{ik} = y_i z_k$$

et interprétons ces quantités comme coordonnées des points d'un espace S_r à $r = n(n+2)$ dimensions.

Les équations obtenues en écrivant que le déterminant

$$| X_{ik} |$$

est de caractéristique un sont celles de la variété de Segre V_{2n} représentant les couples de points des espaces (y) et (z).

La variété V_{2n} est d'ordre $\binom{2n}{n}$.

Une hyperplan de S_r représente une réciprocité des espaces (y), (z).

2. Coupons la variété V_{2n} par $n+1$ hyperplans linéairement indépendants, c'est-à-dire par un espace à $n(n+1)-1$ dimensions. Soit V_{n-1} cette section.

Écrivons les équations des hyperplans sous la forme

$$z_0\varphi_{i0}(y) + z_1\varphi_{i1}(y) + \ldots + z_n\varphi_{in}(y) = 0, \quad (i = 0,1,\ldots,n)$$

les φ étant des formes linéaires en $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

En éliminant les z entre les équations précédentes, on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{0n} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n0} & \varphi_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

qui représente une hypersurface Ω_{n-1} d'ordre $n+1$ de l'espace (y).

A un point de V_{n-1} correspond un couple de points y, z et à ce couple un seul point y de Ω_{n-1}. Inversement, à un point y de Ω_{n-1} correspond un point z et au couple y, z, un seul point de V_{n-1}. Les variétés V_{n-1}, Ω_{n-1} sont donc en correspondance birationnelle.

On sait que la variété canonique d'une hypersurface d'ordre $n+1$ d'un S_n est d'ordre zéro et son genre géométrique est $P_g = 1$. On voit donc que *le genre géométrique de* V_{n-1} *est* $P_g = 1$.

3. Coupons maintenant la variété V_{2n} par un espace à $n(n+1)-2$ dimensions, c'est-à-dire par $n+2$ hyperplans linéairement indépendants. Soit V_{n-2} la section.

En raisonnant comme précédemment, on voit qu'à la variété V_{n-2} correspond dans l'espace (y) la variété Ω_{n-2} d'équations

$$\begin{Vmatrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{0n} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n0} & \varphi_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{n\,n} \\ \varphi_{n+1\,0} & \varphi_{n+1\,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{n+1\,n} \end{Vmatrix} = 0.$$

et d'ordre $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

La variété V_{n-1} ayant une variété canonique d'ordre zéro, le système de ses sections hyperplanes $|V_{n-2}|$ est son propre adjoint. Il en résulte que sur une variété V_{n-2}, les hyperplans découpent les variétés canoniques, c'est-à-dire que les sections hyperplanes de V_{n-2} forment le système canonique de cette variété.

La variété V_{n-2} *a le genre géométrique* $P_g = n(n+1) - 1$.

On en déduit que sur la variété Ω_{n-2} le système canonique est le système des variétés

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{00} & \varphi_{01} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{0n} \\ \varphi_{10} & \varphi_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n+1\,0} & \varphi_{n+1\,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \varphi_{n+1\,n} \\ \psi_0 & \psi_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \psi_n \end{matrix} \right\| = 0,$$

où les ψ sont des formes linéaires en y à coefficients variables.

L'ordre des variétés canoniques de Ω_{n-2} est $\binom{n+3}{3}$ (1).

4. Considérons maintenant la section de V_{2n} par un espace à $n(n+1) - 3$ dimensions, c'est-à-dire par $n+3$ hyperplans linéairement indépendants. Soit V_{n-3} cette section.

A V_{n-3} correspond dans l'espace (y) la variété Ω_{n-3} d'équations

$$\| \varphi_{i0} \quad \varphi_{i1} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \varphi_{in} \| = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, n+2).$$

d'ordre $\binom{n+3}{3}$.

Puisque sur la variété V_{n-2} le système canonique coïncide avec le système des sections hyperplanes, on a $V'_{n-3} = 2V_{n-3}$ et il en résulte que sur une variété V_{n-3}, le système canonique est découpé par les hyperquadriques.

La variété V_{n-3} appartient à un espace à $n(n+1) - 3$ dimensions, qui contient $\binom{n^2+n-1}{2}$ hyperquadriques linéaire-

(1) C. Segre, *Gli ordine delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2e sem. 1900, pp. 253-260 ; Opere, vol. IV, pp. 179-187).

ment indépendantes. Mais si, dans les équations de V_{2n} on supprime $n - 1$ lignes et $n - 1$ colonnes, on obtient un déterminant à quatre éléments qui, égalé à zéro, représente une hyperquadrique contenant V_{2n} et par suite V_{n-3}. Il y a $\binom{n+1}{2}^2$ de ces hyperquadriques linéairement indépendantes et le genre géométrique de V_{n-3} est donc

$$P_g = \binom{n^2+n-1}{2} - \binom{n+1}{2}^2 = \frac{1}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{3}{2}n(n+1) + 1.$$

Tel est également le genre de la variété Ω_{n-3}.

Les équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{i0} & \varphi_{i1} & . & . & . & \varphi_{in} \\ \psi_0 & \psi_1 & . & . & . & \psi_n \end{matrix} \right\| = 0, \qquad (i = 0,1,\ldots,n+2)$$

où les ψ sont des formes linéaires en y à coefficients variables, représentent une variété d'ordre $\binom{n+4}{4}$ correspondant à une section hyperplane de V_{n-3}. Cette variété découpe sur Ω_{n-3}, la moitié d'une variété canonique. Celles-ci sont donc d'ordre $2\binom{n+4}{4}$.

5. Plus généralement, la variété V_{n-k} intersection de V_{2n} avec un espace à $n(n+1) - k$ dimensions, c'est-à-dire avec $n+k$ hyperplans linéairement indépendants, a pour homologue dans l'espace (y) la variété Ω_{n-k} d'équations

$$\| \varphi_{i0} \quad \varphi_{i1} \quad . \quad . \quad . \quad \varphi_{in} \| = 0, \qquad (i = 0,1,\ldots,n+k-1).$$

Les variétés V_{n-k}, Ω_{n-k} sont birationnellement identiques et sur V_{n-k}, le système canonique est découpé par les variétés d'ordre $k - 1$.

La variété Ω_{n-k} est d'ordre $\binom{n+k}{k}$.

A la section de V_{n-k} par un hyperplan correspond sur Ω_{n-k} la variété V_{n-k-1} d'équations

$$\| \varphi_{i0} \quad \varphi_{i1} \quad . \quad . \quad . \quad \varphi_{in} \| = 0, \qquad (i = 0,1,\ldots,n+k)$$

qui est d'ordre $\binom{n+k+1}{k+1}$. Aux variétés canoniques de V_{n-k} correspondent sur Ω_{n-k} les variétés du système $(k-1)\,\Omega_{n-k-1}$. Les variétés canoniques de Ω_{n-k} sont donc d'ordre

$$(k-1)\binom{n+k+1}{k+1}.$$

6. Considérons la variété V_1 section de V_{2n} par un espace à n^2+1 dimensions ($k=n-1$). Il lui correspond dans l'espace (y) la courbe Ω_1 d'équations

$$\| \varphi_{i0} \quad \varphi_{i1} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \varphi_{in} \| = 0, \qquad (i = 0,1,\ldots,2n-1).$$

La série canonique de V_1 est découpée par les variétés d'ordre $n-2$. A une section hyperplane de V_1 correspond sur Ω_1 un groupe de $\binom{2n}{n}$ points et les groupes canoniques de cette dernière courbe sont équivalents à $n-2$ des groupes précédents. Si π est le genre de la courbe V_1, on a donc

$$2\pi - 2 = (n-2)\binom{2n}{n},$$

c'est-à-dire

$$2\pi - 2 = 2(n-2)\binom{2n-1}{n-1}$$

et enfin

$$\pi = (n-2)\binom{2n-1}{n-1} + 1.$$

Liège, le 28 octobre 1967.