Sur les surfaces algébriques contenant un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques de genre supérieur à deux.

Les surfaces algébriques possédant un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques ont fait l'objet, ces derniers temps, de plusieurs notes publiées par M. Rosenblatt et par moi. M. Rosenblatt a étudié les surfaces contenant un faisceau irrationnel de courbes de genre deux (*). J'ai publié tout d'abord une petite note sur la surface contenant un faisceau elliptique de courbes de genre deux et dont le système canonique est irréductible (**), surface que j'avais recontrée dans un travail antérieur (***). Ensuite, j'ai considéré les surfaces contenant un faisceau irrationnel de courbes hyperellitiques de genre trois (****). Dans ce travail, je vais étudier les surfaces contenant un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques de genre quelconque, supérieur à deux, et dont le système canonique est irréductible et au moins simplement infini. Précisément, j'établirai le théorème suivant:

Si une surface algébrique de genres géometrique et linéaire supérieurs à un et dont le système canonique est irréductible,

(*) *Sur les surfaces algébriques qui possèdent un faisceau irrationnel de courbes de genre deux.* Prac. Matematyczno-Fizycnyck. 1913. Vol XXVI.

(**) *Sur les surfaces algébriques possédant un faisceau elliptique de courbes de genre deux.* Mathem. Annalen. 1913. Bd. LXXIV.

(***) *Sur les surfaces algébriques dont les courbes canoniques sont elliptiques doubles.* Mathem Annalen. 1912. Bd. LXXII.

(****) *Sur les surfaces possédant un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques de genre trois* Comptes-Rendus de la Société des Sciences de Bohême. 1913 *possède un faisceau de genre $p' > 0$ de courbes hyperelliptiques de genre $p > 2$, ses genres géométrique, arithmétique et linéaire ont respectivement les valeurs*

$$p_g = \frac{1}{2}px - 2p(p'-1) + y,$$

$$p_a = \frac{1}{2}px - (2p+1)(p'-1) - 1,$$

$$p^{(1)} = 2(p-1)x - 4(p-1)(p'-1) + 1,$$

y et x étant des entiers positifs satisfaisant aux inégalités

$$0 \leqslant y \leqslant p,$$
$$(p-3)x \geqslant (p-6)(p'-1) + y.$$

De plus, x est pair si p est impair. Chaque courbe canonique contient une involution d'ordre deux et de genre $p' + \frac{1}{2}(p-2)x$.

On a démontré depuis longtemps que seules les courbes hyperelliptiques ont la série canonique composée avec une involution. La même question, pour les surfaces, n'a pas encore été abordée. Les seules surfaces connues, dont le système canonique est composé avec une involution, sont les surfaces étudiées dans ce travail, celles qui possèdent un faisceau irrationnel de courbes de genre deux, les plans doubles, et la surface représentant les couples de points d'une courbe de genre trois. Sont-ce les seules? C'est là une question qui reste en suspens.

1. — Soit F une surface algébrique satisfaisant aux conditions suivantes.

a) ses genres géométrique p_g et linéaire $p^{(1)}$ sont supérieurs à un,

b) son système canonique est irréductible,

c) elle est dépourvue de courbes exceptionnelles.

d) elle possède un faisceau $\{C\}$ de genre $p'>0$ de courbes irréductibles hyperelliptiques C de genre $p>2$.

Sur chaque courbe C il existe donc par hypothèse une série linéaire g_2^1 d'ordre deux et de rang un. Ces $\infty^1 g_2^1$ déterminent, sur F, une involution I_2. Soit F^0 une surface représentative de cette involution, c'est-à-dire une surface dont les points et les couples de I_2 se correspondent un à un.

A une courbe C correspond, sur F^0, une courbe rationnelle C^0 qui engendre un faisceau $\{C^0\}$, de genre p', en correspondance birationnelle avec $\{C^0\}$. La surface F possédant un faisceau de courbes rationnelles, peut être ramenée, par une transformation birationnelle, à une réglée de genre p' (*). Les genres géométrique, arithmétique et l'invariant de Castelnuovo-Enriques de F^0 ont donc respectivement pour valeur $p_g^0 = 0, p_a^0 = -p', \omega^0 = 9 - 8p'$.

Soit $|L|$ le système canonique (irréductible) de F, C' une courbe adjointe à $\{C\}$. De l'inégalité fondamentale d'adjonction

$$C' = L + C,$$

on déduit que ($\{C\}$ étant de degré zéro) les courbes canoniques de F rencontrent une courbe C en des groupes canoniques, c'est-à-dire en des groupes composés de $p - l$ groupes de la g_2^1 appartenant à cette C.

Les courbes C découpent donc, sur une courbe L, une involution d'ordre $2p - 2$ et de genre p', dont chaque groupe est composé de $p - 1$ couples de I_2. Par conséquent I_2 détermine sur une courbe L, une involution γ'_2 d'ordre deux et d'un certain genre $\pi \leq p$(1). A une courbe L correspondra donc sur la surface F^0 une courbe L^0 de genre π. Cette courbe recontrera une courbe C^0 en $p - 1$ points et elle en-

(*) ENRIQUES. *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali.* Mathem. Annalen. 1899. Bd. LII.

gendrera un système linéaire de degré $\frac{1}{2}(p^{(1)}-1)$ de genre π et de dimension $p_g - 1$, correspondant au système canonique de F. On aura $\pi > 1$, car les surfaces pour lesquelles $\pi = 1$ ont été déterminées dans mon travail déjà cité; aucune ne possède un faisceau irrationnel de courbes hyperelliptiques de genre supérieur à deux.

Le théorème de Riemann-Roch, appliqué au système $[L^0]$, donne une première inégalité

$$p_g - 1 \geqslant \frac{1}{2}(p^{(1)} - 1) - p' - \pi + 1.$$

D'autre part, les C^0 découpent sur une involution γ'_{p-1} d'ordre $p-1$ et de genre p'. Cette involution possède, d'après la formule de Zeuthen, $2(\pi - 1) - 2(p-1)(p'-1)$ coincidences. Ce nombre est certainement supérieur à zéro, car, sans nuire à la généralité, on peut prendre une L^0 touchant une C^0. On a donc une deuxième inégalité.

$$(p-1)(p'-1) < \pi - 1.$$

2.—Entre les surfaces F^0, F, nous avons par construction, une correspondance (1, 2). Cette correspondance possède, sur F^0, une certaine courbe de diramation D dont on peut aisément obtenir une expression fonctionnelle.

Nous savons tout d'abord que le nombre base d'une surface réglée (ou référable à une réglée) est égal à deux (*), D'autre part, une courbe C^0 étant de degré zéro, une courbe L^0 de degré $\frac{1}{2}(p^{(1)}-1)$, et ces deux courbes ayant en commun $p-1$ points, elles sont indépendantes. En effet, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & p-1 \\ p-1 & \frac{1}{2}(p^{(1)}-1) \end{vmatrix} = -(p-1)^2 \gtrless 0.$$

(*) SEVERI. *Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica.* Mathem. Annalen. 1906. Bd. LXII.

Ces courbes forment donc une base et on a une relation de la forme

$$kD \equiv k' L^0 + k'' C^0, \tag{1}$$

k, k', k'' étant des entiers.

Paur déterminer k' et k'', il suffit de considérer successiment les correspondances existant entre une C^0 et la C homologue, entre une L^0 et la L homologue.

Dènotons, suivant l'usage, par $[AB]$ le nombre de points communs à deux courbes A, B. De la relation fonctionnelle (1), on déduit

$$k[DC^0] = k'[L^0 C^0] + k''[C^0 C^0],$$

c'est-à-dire, puisque $[L^0 C^0] = p - 1$, $[C^0 C^0] = 0$,

$$k[DC^0] = (p-1)k'.$$

La g_2^1 existant sur une courbe C possède $2(p+1)$ points doubles, donc D recontre une courbe C^0 en $2(p+1)$ points On aura donc

$$[DC^0] = 2(p+1)$$

et

$$k' = 2\frac{p+1}{p-1}k.$$

De (1), on déduit encore

$$k[DL^0] = k'[L^0 L^0] + k''[C^0 L^0],$$

c'est-à-dire, puisque $[L^0 L^0] = \frac{1}{2}(p^{(1)} - 1)$,

$$k[DL^0] = \frac{1}{2}(p^{(1)} - 1)k' + (p-1)k''.$$

Considérons la correspondance existant entre une courbe

L^0 et la courbe L homologue. On a, par la formule de Zeuthen,

$$4(\pi-1)+[DL^0]=2(p^{(1)}-1).$$

Moyennant les deux dernières relations écrites et (2), on a

$$k''=\frac{k}{p-1}\left[\frac{p-3}{p-1}(p^{(1)}-1)-4(\pi-1)\right]. \qquad (3)$$

Désignons respectivement par ξ et ν le genre et le degré virtuels de D. De la relation (1), on déduit

$$k(\xi-1)=k'(\pi-1)+\tfrac{1}{2}k'(k'-1).\tfrac{1}{2}(p^{(1)}-1)-\tfrac{1}{2}k(k-1)\nu+$$
$$+k'\,k''(p-1)-k'',$$
$$k^2\nu=\tfrac{1}{2}(p^{(1)}-1)k'^2+2(p-1)k'\,k''.$$

Au moyen des formules (2) et (3), ces expressions deviennent

$$\xi-1=\tfrac{1}{2}(p^{(1)}-1)\frac{5p^2-6p-3}{(p-1)^2}-2\frac{3p+1}{p-1}(\pi-1), \qquad (4)$$

$$\nu=2(p^{(1)}-1)\frac{(p+1)(3p-5)}{(p-1)^2}-16\frac{p-1}{p-1}(\pi-1). \qquad (5)$$

3. — M. Severi a établi des formules liant les invariants de Castelnuovo-Enriques et les genres arithmétiques de deux surfaces en correspondance algébrique (*). Dans le cas actuel, ces formules s'écrivent

$$\omega-1-2(\omega^0-1)=\xi-1+\tfrac{1}{2}(2\xi-2-\nu), \qquad (6)$$

$$24(p_a+1)-48(p_a^o+1)=6(\xi-1)+3(2\xi-2-\nu). \qquad (7)$$

(*) SEVERI. *Sulle relazioni che legano i caratteri di due superficie.* Rend. Ist. Lomb. 1903. s. 2. Vol. XXXVI.

Actuellement, on a $\omega^0 = 9 - 8p'$, $p_a^o = -p'$. La surface F étant dépourvue de courbes exceptionnelles, on a de plus $\omega = p^{(1)}$.

Dans la formule (6), remplaçons ξ et ν par leurs valeurs (4) et (5). O_n obtient la relation

$$(p^{(1)}-1)\frac{p-2}{(p-1)^2} + 4(p'-1) - 4\frac{\pi-1}{p-1} = 0. \quad (8)$$

Substituons la valeur de $p^{(1)} - 1$ donnée par (8) dans les formules (4) et (5), nous obtenons

$$\xi - 1 = 2\frac{2p+1}{p-2}(\pi-1) - 2\frac{5p^2-6p-3}{p-2}(p'-1), \quad (9)$$

$$\nu = 8\frac{p+1}{p-2}(\pi-1) - 8\frac{(p+1)(3p-5)}{p-2}(p'-1). \quad (10)$$

4.—Remplaçons, dans la formule (7), ξ et ν par leurs valeurs (9) et (10). On obtient

$$p_a = \frac{p}{p-2}(\pi-1) - 2\frac{p^2-p-1}{p-2}(p'-1) - 1. \quad (11)$$

D'après le théorème de MM. Castelnuovo, Enriques et Severi sur les intégrales de Picard de première espèce appartenant à une surface algébrique, la surface F possède $p_g - p_a$ de ces intégrales. p' de celles-ci sont constantes le long d'une courbe C, les autres donnent des intégrales abéliennes de première espèce de cette courbe. On a donc

$$p' \leqq p_g - p_a \leqq p' + p.$$

Posons $p_g = p_a + p' + y$, y satisfaisant à la double inégalité $0 \leqslant y \leqslant p$.

En tenant compte de (11), on trouve

$$p_g = \frac{p}{p-2}(\pi-1) - \frac{2p^2-3p}{p-2}(p'-1) + y. \quad (12)$$

5.—Supposons que $|L^0|$ soit composé avec une involution d'ordre n. Considérons les L^0 ayant un point double en z points fixés à priori, Ces courbes auront en outre $(n-1)z$ points doubles fixés et seront donc de genre $\pi - nz$. Les C^0 marquent sur une de ces courbes une involution d'ordre $p-1$ et de genre p', possédant d'après la formule de Zeuthen,

$$2(\pi - nz - 1) - 2(p-1)(p'-1) \qquad (13)$$

points doubles. Ce nombre est certainement positif, car on peut toujours prendre un L^0 touchant une C^0.

Si par suite nous prenons pour z une valeur ne rendant pas positive l'expression (13), il ne doit pas y avoir de courbes L^0 ayant z points doubles (et par conséquent nz) assignés. Pour cela, il suffira d'avoir

$$p_g - 3z \leqq 0,$$

car $p_g - 1$ est la dimension de $|L^0|$

En particulier, si nous prenons

$$z = \pi - 1 - (p-1)(p'-1),$$

nous devons avoir

$$p_g \leqq 3(\pi - 1) - 3(p-1)(p'-1),$$

c'est-à-dire, à cause de (12),

$$(p^2 - 6p + 6)(p'-1) + (p-2)y \leqq 2(p-3)(\pi - 1). \qquad (14)$$

6.—Reprenons l'expression (11) de p_a. Nous voyons que $p(\pi - 1) - 2(p^2 - p - 1)(p'-1)$ doit être multiple de $p-2$. On a

$$p(\pi - 1) - 2(p^2 - p - 1)(p'-1) \equiv 2(\pi - 1) - 2(p'-1) \qquad (\text{mod. } p-2).$$

Posons donc

$$\pi - 1 = (p' - 1) + \tfrac{1}{2}(p - 2)\,x, \qquad (15)$$

x étant un entier qui est nécessairement pair si p est impair.

Moyennant (15), les expression de p_g, p_a, $p^{(1)}$ deviennent

$$p_g = \tfrac{1}{2}\,px - 2p\,(p' - 1) + y,$$
$$p_a = \tfrac{1}{2}\,px - (2p + 1)\,(p' - 1) - 1,$$
$$p^{(1)} = 2\,(p - 1)\,x - 4\,(p - 1)\,(p' - 1) + 1.$$

L'inégalité (14) devient

$$(p - 6)\,(p' - 1) + y < (p - 3)\,x;$$

x est donc positif.

Liége, le 10 Septembre 1913.