# Sur les involutions cycliques d'ordre $2^\alpha$ et de genres un sur une surface de genres un.

Note de

**Lucien Godeaux.**

Vorgelegt von Herrn F. Klein in der Sitzung am 24. Mai 1913.

En me basant sur un théorème de M. Enriques[1]) d'après lequel une involution de genres un sur une surface de genres un, est cyclique ou est composée avec une involution cyclique, j'ai pu démontrer que l'ordre d'une pareille involution n'admet comme facteurs premiers que deux et trois[2]). En d'autres termes, considérant une correspondance rationnelle $(1, n)$ entre deux surfaces $\Phi$, $F$ de genres un, on a $n = 2^\alpha 3^\beta$, $\alpha$ et $\beta$ étant des entiers positifs ou nuls.

Continuant mes recherches sur ce sujet, j'ai pu démontrer qu'une involution cyclique d'ordre $2^\alpha$ et de genres un sur une surface de genres un, ne peut exister que si $\alpha$ est au plus égal à trois. C'est la démonstration de cette propriété que je me propose de donner dans cette note. D'une manière précise, je vais établir les théorèmes suivants:

I. — Si sur une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$), il existe une involution cyclique d'ordre $2^\alpha$ et de genres un ($p_a = P_4 = 1$), $\alpha$ est au plus égal à trois.

---

1) Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno. Rend. R. Accad. di Bologna, 1910.

2) Sur les transformations rationelles entre deux surfaces de genres un. C. R., 12 Août 1912. — Un exposé des résultats contenus dans cette note sera publié prochainement.

II. — Si $\alpha = 2$, on peut établir une transformation birationelle entre les groupes de l'involution et les points d'une surface d'ordre $2\varrho - 2$ à sections hyperplanes de genre $\varrho$, située dans un espace linéaire à $\varrho$ dimensions, et possédant quatre points doubles biplanaires de deuxième espèce[1]) et deux points doubles coniques.

III. — Si $\alpha = 3$, on peut établir une transformation birationelle entre les groupes de l'involution et les points d'une surface d'ordre $2\varrho - 2$, à sections hyperplanes de genre $\varrho$, située dans un espace linéaire à $\varrho$ dimensions, et possédant deux points biplanaires de sixième espèce, un point biplanaire de $2^e$ espèce et un point double conique.

Avant de commencer, je rappellerai qu'une surface de genres un est caractérisée par $p_a = P_4 = 1$. Une telle surface a $p_a = p^{(1)} = p_g = P_2 = \cdots = P_i = \cdots = 1$, $I = 20$. Une courbe de genre virtuel $\pi$, donnée sur une surface de genres un, appartient à un système linéaire complet de degré $2\pi - 2$ et de dimension $\pi$. Ce systième est son propre adjoint, c'est-à-dire que ses courbes découpent, sur l'une d'elles, la série canonique $g_{2\pi - 2}^{\pi - 1}$. Les courbes canoniques et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

1. — Soit $F$ une surface algébrique de genres un ($p_a = P_4 = 1$) et, sur cette surface, un involution $I_\alpha$, cyclique, d'ordre $2^\alpha$, également de genres un ($p_a = P_4 = 1$). Soit $T$ la transformation birationelle de $F$ en elle-même, de période $2^\alpha$, engendrant l'involution $I_\alpha$.

Comme nous l'avons montré dans notre note des Comptes-Rendus, on peut toujours supposer l'existence, sur $F$, d'un système linéaire simple $|C|$, de degré $2\pi - 2$, de genre et de dimension $\pi$, sans points-bases, qui soit invariant pour $T$, c'est-à-dire tel qu'une de ses courbes est transformée par $T$ en une de ses courbes, distincte ou non de la première.

Considérons une courbe $C$ et ses $2^\alpha - 1$ transformées par les $2^\alpha - 1$ premières puissances de $T$. La somme de ces $2^\alpha$ courbes est une courbe $D$, de genre $2^{2\alpha}(\pi - 1) + 1$ et de degré $2^{2\alpha+1}(\pi - 1)$,

---

1) Un point biplanaire d'espèce $2t$ est constitué par une suite de $t + 1$ points doubles infiniment voisins successifs, le dernier étant un point conique. Une pareille singularité abaisse la classe d'une surface de $2(t + 1)$ unités. Un point biplanaire est d'espèce $2t + 1$ lorsqu'il est constitué par une suite de $t + 1$ points doubles et d'un point simple infiniment voisins successifs.

invariante pour $T$, c'est-a-dire transformée en elle-même par $T$. Cette courbe $D$ définit un système linéaire incomplet $|D|$, composé avec l'involution $I_\alpha$ et tel que chacune de ses courbes est invariante pour $T$.

Rapportons projectiveement les courbes $|D|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à $2^\alpha(\pi-1)+1$ dimensions. Nous obtenons une surface $\Phi$, d'ordre $2^{\alpha+1}(\pi-1)$, à sections hyperplanes de genre $2^\alpha(\pi-1)+1$, telle qu'à un point de cette surface correspondent les $2^\alpha$ points de $F$ formant un groupe de $I_\alpha$. En d'autres termes, nous avons une surface $\Phi$ en correspondance $(1, 2^\alpha)$ avec F. Par hypothèse, cette surface $\Phi$ est de genres un ($p_\alpha = P_4 = 1$). Nous désignerons par $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de $\Phi$.

2. — Ces choses étant rappelées, considérons un point de coïncidence $P_1$ sur $F$, c'est-à-dire un point comptant plusieurs fois dans le groupe de $I_\alpha$ anquel il appartient. Nous savons que de pareils points sont en nombre fini[1]). Le point $P_1$ est changé en lui-même par l'une des transformations $T, T^2, T^4, \ldots, T^{2^{\alpha-1}}$[2]. Supposons, pour fixer les idées, que $P_1$ est invariant pour la transformation $T^{2^{\alpha-k}} (0 < k \leqq \alpha)$. Cette transformation a la période $2^k$, par suite $P_1$ comptera pour $2^k$ points dans le groupe de $I_\alpha$ auquel il appartient. Pour cette raison, nous dirons que $P_1$ est un point de coïncidence d'ordre $2^k$.

Les transformations $T, T^2, T^3, \ldots, T^{2^{\alpha-k}-1}$ changent $P_1$ en $P_2$, $P_3, \ldots$. Ces $2^{\alpha-k}-1$ nouveaux points sont distincts de $P_1$ et sont aussi des coïncidences d'ordre $2^k$, de sorte que si un groupe de $I_\alpha$ contient un point de coïncidence d'ordre $2^k$, ce groupe est formé de $2^{\alpha-k}$ pareils points. Le point $P$ correspondant à ce groupe sur $\Phi$ sera dit point de diramation d'ordre $2^k$.

Remarquons qu'une courbe $D$ ayant en $P_1$ une certaine singularité en aura la même singularité en $P_2, P_3, \ldots$. Nous pourrons donc, dans la suite, ne parler de $P_2, P_3 \ldots$ que pour mémoire.

3. — Appelons $D_1$ les courbes $D$ passant par $P_1$ (et par suite par $P_2, P_3, \ldots$), et soient $\Gamma_1$ les courbes $\Gamma$ correspondantes.

Une courbe $D_1$ a en $P_1$ une certaine singularité; soit $i$ l'abaissement produit sur le genre par cette singularité, de sorte que les courbes $D_1$ sont généralement de genre $2^{2\alpha}(\pi-1)+1-2^{\alpha-k}.i$. Sur une courbe $D_1$, $T$ engendre une involution $\gamma'_\alpha$, d'ordre $2^\alpha$ et cette involution possédera, en $P_1$, $\delta > 0$ coïncidences.

1) Enriques, loc. cit.

2) Il est inutile de considérer $T^3, T^5, \ldots$, car un point invariant pour $T^3$ par exemple, est invariant pour $(T^3)^\nu$. Or il est toujours possible de déterminer $\nu$ pour avoir $(T^3)^\nu \equiv T^{2\alpha}. T^{2k}$.

Supposons que $\Phi$ n'ait aucune singularité en $P$, et appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance entre une $\Gamma_1$ et la $D_1$ correspondante. Qu a

$$2^\alpha . 2^{\alpha+1}(\pi-1)+2^{\alpha-k}\delta = 2^{2\alpha+1}(\pi-1)-2.2^{\alpha-k}.i,$$

d'où $\delta = 0$, ce qui est absurde. Le point $P$ est donc singulier pour $\Phi$. Précisément, il est double, car, une multiplicité plus élévée donnerait, sur $\Phi$, un système linéaire de dimension supérieure au genre, ce qui est impossible.

P étant double, la formule de Zeuthen donne

$$2^\alpha \{2^{\alpha+1}(\pi-1)-2\}+2^{\alpha-k}\delta = 2^{2\alpha+1}(\pi-1)-2.2^{\alpha-k}.i,$$

c'est-à-dire

$$\delta+2i = 2^{k+1}.$$

Mais $\delta$ est pair et de plus est multiple de $2-1$, car la $\gamma'_\alpha$ est cyclique. Donc on a

$$\delta = 2(2^k-1),\ i = 1.$$

Les courbes $D_1$ ont donc un point double en $P_1$ (et de même en $P_2, P_3, \ldots$).

Le point $P$ étant double pour $\Phi$, le système $|\Gamma_1|$ a de degré $2^{\alpha+1}(\pi-1)-2$ et par suite, le degré effectif de $|D_1|$ est $2^{2\alpha+1}(\pi-1)-2^{\alpha+1}$. Il en résulte qu'en $P_1$, les courbes $D_1$ ont $2^{k+1}$ intersections absorbées. Sur chaque branche d'une $D_1$ en $P_1$, il y a d'autre part une coïncidence $(2^k-1)$-uple, par suite les $D_1$ ont un contact $2(2^{k-1}-1)$ ponctuel sur chaque branche. En d'autres termes, il y a $2(2^{k-1}-1)$ points-simples infiniment voisins successifs de $P$ communs à toutes les $D_1$ sur chaque branche de celles-ci.

De ce qu'il y a une coïncidence sur chaque branche de $D_1$ en $P_1$, on conclut que les $\Gamma_1$ ont généralement deux tangentes distinctes en $P$. Par suite, le point $P$ est un point double conique ou biplanaire pour $\Phi$.

4. — Nous allons maintenant construire un système linéaire de courbes $D$ ayant en $P_1, P_2, \ldots$ des points $2^k$-uples à tangentes variables.

Pour cela, considérons une courbe $C$, de genre $\pi$, et ses transformées au moyen de $T, T^2, T^3, \ldots T^{2^{\alpha-k}-1}$. La somme de $C$ et les $2^{\alpha-k}-1$ courbes ainsi obtenues (et qui sont aussi des courbes $|C|$) est une courbe $C_1$ de genre $2^{2\alpha-2k}(\pi-1)+1$ et de degré $2^{2\alpha-2k+1}(\pi-1)$. Cette courbe $C_1$ engendre un système complet $|C_1|$ de dimension $2^{2\alpha-2k}(\pi-1)+1$.

Considérons une courbe $C_1$ passant par $P_1$ et ayant avec une des branches d'une courbe $D_1$ un contact $2(2^{k-1}-1)$ — ponctuel, passant par $P_2$ et ayant avec une branche (correspondante à celle choisie en $P_1$) un contact $2(2^{k-1}-1)$ — ponctuel et se comportant de la même manière en $P_3$, $P_4$ . . . La transformation $T^{2^{\alpha-k}}$ et ses puissances changent cette $C_1$ en d'autres courbes ayant la même manière de se comporter en $P_1$, $P_2$, . . . . On a ainsi construit une courbe $D'$, qui n'est évidemment autre qu'une courbe de $|D|$, ayant en $P_1$ une suite de $2(2^{k-1}-1)+1$ points $2^k$-uples infiniment voisins successifs et ayant le même comportement en $P_2$, $P_3$, . . . . On peut construire une seconde courbe $D''$ ayant la même singularité que $D'$ en $P_1$, $P_2$, . . . mais telle que la suite de points $2^k$ — uples soit sur l'autre branche d'une $D_1$. Ces courbes $D'$, $D''$ déterminent un système linéaire de courbes $D$ ayant en $P_1$, $P_2$, . . . des points $2^k$ - uples à tangentes variables. Nous désignerons ces courbes par $D_2$ et le système linéaire qu'elles engendrent sera $|D_2|$.

Soit $|\Gamma_2|$ le système correspondant à $|D_2|$ sur la surface $\Phi$ et soit $\nu$ le degré virtuel de ce système.

Supposons qu'en un point infiniment voisin de $P_1$, il n'y ait pas de coïncidence. Alors, la formule de Zeuthen appliquée à un couple de courbes $\Gamma^2$, $D^2$ correspondantes, donne

$$2^\alpha \nu = 2^{2\alpha+1}(\pi-1)-2^\alpha(2^k-1).$$

Cela revient-à-dire que $2^k-1$ est pair (car $\nu$ est pair), ce qui est absurde.

Supposons donc qu'en chaque point infiniment voisin de $P_1$ il y ait une coïncidence $2^t$ - uple ($o<t\leqq k$). La formule de Zeuthen donne actuellement

$$2^\alpha\nu+2^{\alpha-k}\,.\,2^k(2^t-1) = 2^{2\alpha+1}(\pi-1)-2^\alpha(2^k-1),$$

c'est-à-dire

$$\nu = 2^{\alpha+1}(\pi-1)-2^k-2^t+2.$$

Le degré effectif de $|D_2|$ est $2^{2\alpha+1}(\pi+1)-2^{\alpha+k}$, donc le degré effectif de $|\Gamma_2|$ est $2^{\alpha+1}(\pi-1)-2^k$. Or, le degré virtuel d'un système linéaire est au moins égal au degré effectif, donc on a

$$\nu \geqq 2^{\alpha+1}(\pi-1)-2^k,$$

d'où

$$2^{t-1}\leqq 1.$$

On a donc $t=1$, c'est-à-dire:

En un point quelconque du domaine d'un point de coïncidence de $I_\alpha$, il y a une coïncidence double.

Les degrés virtuels et effectifs de $|\Gamma_2|$ sont égaux à $\nu = 2^{\alpha+1}$

$(\pi - 1) - 2^k$, par suite la surface $\Phi$ a en $P^*$ une singularité composée de $2^{k-1}$ points doubles. De plus, comme sur chaque $D_2$ il y a deux groupes de $I_\alpha$, composés chacun de $2^{\alpha-1}$ coïncidences doubles, infiniment voisins de $P_1$, les branches des $\Gamma_2$ sont distinctes. Les branches des $D_2$ sont distinctes, donc il en est de même des branches des $\Gamma_2$, et le dernier point double de la suite en $P$ est conique. $\Phi$ a donc en $P$ un point biplanaire d'espèce $2^{k-2}$.

En un point de diramation d'ordre $2^k$, $\Phi$ a un point double biplanaire d'espèce $2^{k-2}$.

On sait qu'une pareille singularité abaisse la classe de $\Phi$ de $2^k$ unités.

5. — Nous allons établir une première formule fondamentale liant le nombre de points de diramation de $\Phi$ et le nombre $\alpha$.

Supposons que la surface $\Phi$ possède $x_k$ points de diramation d'ordre $2^k (k = 1, 2; 3, \ldots, \alpha)$.

Soit $m$ la classe effective de $\Phi$.

Calculons l'invariant de Zeuthen-Segre I (que nous savons égal à $12 p_a + 9 - p^{(1)} = 20$) au moyen d'un faisceau de sections hyperplanes $\Gamma$ de $\Phi$. On obtient

$$m + \sum_{k=1}^{\alpha} 2^k x_k = 24 + 2^{\alpha+1} (\pi - 1) + 2^{\alpha+2} (\pi - 1).$$

L'invariant de Zeuthen-Segre de $F$ calculé en utilisant le faisceau des $D$ correspondantes, donne

$$m \cdot 2^\alpha + \sum_{k=1}^{\alpha} 2^{\alpha-k} x_k = 24 + 2^{2\alpha+1} (\pi - 1) + 2^{2\alpha+2} (\pi - 1).$$

L'élimination de $m$ entre les deux formules établies donne la relation fondamentale

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=1}^{\alpha} (2^{2k} - 1) 2^{\alpha-k} x_k = 3 \cdot 2^3 (2^\alpha - 1).$$

6. — On obtient une nouvelle relation entre les quantités $x_1$, $x_2, \ldots, x_\alpha$ de la manière suivante.

Considérons la transformation $T^{2^{\alpha-1}}$. Elle a la période deux et engendre sur $F$ une involution du second ordre que nous désignerons par $I_1$. Soit $\Phi_1$ une surface dont les points représentent les couples de $I_1$. Entre $\Phi_1$ et $F$ on a une correspondance (1, 2) et entre $\Phi$ et $\Phi_1$, une correspondance $(1, 2^{\alpha-1})$. Par suite $\Phi_1$ est de genres un $(p_a = P_4 = 1)$.

Quels sont les points de diramation sur $\Phi_1$ pour la correspondance (1, 2) entre $\Phi_1$ et $F$. Un point de coïncidence d'ordre $2^k$ sur $F$ invariant pour $T^{2^{\alpha-k}}$ l'est aussi pour $(T^{2^{\alpha+k}})^{k+1} = T^{2^{\alpha-1}}$, donc c'est un point de coïncidence pour l'involution $I_1$. Le nombre des points de diramation sur $\Phi_1$ est donc $2^{\alpha-1}x_1 + 2^{\alpha-2}2_2 + \cdots + x_\alpha$.

Mais d'autre part, nous avons établi dans notre premier travail des Comptes-Rendus que si entre deux surfaces de genres un, il y a une correspondance (1, 2), il y a huit diramations. Par suite, on a

$$\text{(II).} \qquad \sum_{k=1}^{\alpha} 2^{\alpha-k} x_k = 8.$$

Remarquons tout de suite que si $x_{\alpha-3}$ n'est pas nul, on a nécessairement, par (II), $x_{\alpha-3} = 1$, tous les autres $x$ étant nul. La formule (I) donne alors

$$2^{2\alpha-6} - 1 = 3(2^\alpha - 1)$$

avec $\alpha \geqq 4$. On vérifie aisément que cela est impossible. On conclut alors de la formule (II) que seuls $x_\alpha$, $x_{\alpha-1}$ et $x_{\alpha-2}$ peuvent, ne pas être nul.

7. — Les formules fondamentales (I) et (II) s'écrivent, en posant $x_{\alpha-3} = \cdots = x_1 = 0$,

$$\text{(I}'\text{)} \quad (2^{2\alpha} - 1)\,x_\alpha + 2\,(2^{2\alpha+2} - 1)\,x_{\alpha-1} + 4\,(2^{2\alpha-4} - 1)\,x_{\alpha-2} = 3\,.\,2^5(2^\alpha - 1),$$

$$\text{(II}''\text{)} \qquad x_\alpha + 2\,x_{\alpha-1} + 4x_{\alpha-2} = 8.$$

Supposons $\alpha > 2$ et éliminons $x_{\alpha-2}$ entre les équations précédentes, il vient:

$$2^{2\alpha-4}(2^4 - 1)\,x_\alpha + 2^{2\alpha-3}(2^2 - 1)\,x_{\alpha-1} = 2^4(3\,.\,2^{\alpha-1} - 2^{2\alpha-5} - 1).$$

Le second membre est au plus divisible par 24, donc on a $2\alpha - 4 \leqq 4$, c'est-à-dire $\alpha \leqq 4$.

Si $\alpha = 4$, on a, pour la dernière relation,

$$5x_4 + 2x_3 = 5.$$

Cette équation est incompatible avec (II′), donc on ne peut avoir $\alpha = 4$. On a $\alpha \leqq 3$ et le premier théorème énoncé est ainsi établi.

7. — Nous allons établir les deux autres théorèmes énoncés. Si $\alpha = 2$, les équations (I′) et (II′) deviennent

$$2x_1 + 5x_2 = 24,$$
$$2x_1 + x_2 = 8,$$

d'où $x_3 = 4$, $x_1 = 2$.

Si $\alpha = 3$, (I') et (II'') deviennent

$$4x_1 + 10x_2 + 21x_3 = 56,$$
$$4x_1 + 2a_2 + x_3 = 8.$$

On a nécessairement $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Goettingen, 15 Mars 1913.