Bulletin de la Classe des sciences

Sur une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq (2e note)

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de la singularité de la surface construite dans la première note.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Sur une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq (2e note). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 53, 1967. pp. 17-20;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1967.62805;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1967_num_53_1_62805;

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur une surface possédant une seule courbe canonique de genre cinq

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.
(deuxième note)

Résumé. — Détermination de la singularité de la surface construite dans la première note.

Dans notre première note (1), nous avons laissé en suspens la détermination de la courbe double de la surface de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$, $P_2 = 6$, nous comblons ici cette lacune.

1. Dans notre première note nous sommes arrivé aux équations

$$Z_{00}[\xi_2\eta_{11} - (\xi_3 + \xi_4)\eta_{12} + \xi_1\eta_{22}] + (\xi_3 - \xi_4)^2 = 0, \qquad (1)$$

$$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0, \qquad Y_{02}Y_{13} - Y_{03}Y_{12} = 0,$$

représentant, dans un espace S_7, une variété V_4 dont les sections par des espaces linéaires à cinq dimensions sont des surfaces de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$, $p_2 = 6$. Rappelons que les polynomes ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 égalés à zéro représentent des quadriques dégénérées et que η_{11}, η_{12}, η_{22} sont les polynomes linéaires en Z_{11}, Z_{12}, Z_{22}.

Nous allons modifier l'équation (1) de manière à mettre en évidence les plans formant les quadriques $\xi = 0$.

Observons que dans les équations (1) et (2) de notre première note on peut, sans altérer la généralité, supposer

$$c_1 = c_2' = 1, \; c_1' = c_2 = 0,$$

(1) La première note est parue dans le Bulletin de l'Académie, 1966, pp. 926-934.

d'où

$$\eta_{11} = Z_{11}, \ \eta_{12} = Z_{12}, \ \eta_{22} = Z_{22}$$

Désignons par α_1, α_2 les racines de l'équation

$$a_{00}\alpha^2 + a_{01}\alpha + a_{11} = 0,$$

par β_1, β_2 celles de l'équation

$$a_{22}\beta^2 + a_{23}\beta + a_{33} = 0,$$

par α'_1, α'_2 celles de l'équation

$$a'_{00}\alpha^2 + a'_{01}\alpha + a'_{11} = 0,$$

enfin par β'_1, β'_2 celles de l'équation

$$a'_{22}\beta^2 + a'_{23}\beta + a'_{33} = 0.$$

Posons ensuite

$$\theta_1 = a_{00}(Y_{02} - \alpha_1 Y_{12} - \beta_1 Y_{03} + \alpha_1\beta_1 Y_{13}),$$

$$\theta_2 = a'_{00}(Y_{02} - \alpha'_1 Y_{12} - \beta'_1 Y_{03} + \alpha'_1\beta'_1 Y_{13}),$$

$$\theta_3 = a_{22}(Y_{02} - \alpha_2 Y_{12} - \beta'_1 Y_{03} + \alpha_2\beta'_2 Y_{13}),$$

$$\theta_4 = a'_{22}(Y_{02} - \alpha'_2 Y_{12} - \beta_2 Y_{03} + \alpha'_2\beta_2 Y_{13}).$$

En se reportant aux équations de la première note, on voit que l'on a

$$\xi_1 = \theta_1\theta_2, \ \xi_2 = \theta'_1\theta'_2, \ \ \xi_3 = \theta'_1\theta_2, \ \xi_4 = \theta_1\theta'_2,$$

de sorte que l'équation (1) devient

$$Z_{00}[Z_{11}\theta'_1\theta'_2 - Z_{12}(\theta_1\theta'_2 + \theta'_1\theta_2) + Z_{22}\theta_1\theta_2] + (\theta_1\theta'_2 - \theta'_1\theta_2)^2 = 0. \quad (2)$$

2. Nous étudierons maintenant la variété V_5^8 intersection de l'hypersurface (2) et du cône

$$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = 0. \quad (3)$$

Cherchons les intersections des hypersurfaces

$$Z_{11}\theta'_1\theta'_2 - Z_{12}(\theta_1\theta'_2 + \theta'_1\theta_2) + Z_{22}\theta_1\theta_2 = 0, \quad (4)$$

$$\theta_1\theta'_2 - \theta'_1\theta_2 = 0. \quad (5)$$

On voit immédiatement que ces hypersurfaces ont en commun les espaces linéaires à cinq dimensions

$$\theta_1 = \theta'_1 = 0, \quad \theta_2 = \theta'_2 = 0. \quad (6)$$

Posons

$$\theta'_1 = \lambda\theta_1, \quad \theta'_2 = \mu\theta_2.$$

L'équation (4) nous donne

$$Z_{11}\lambda\mu - Z_{12}(\lambda + \mu) + Z_{22} = 0,$$

c'est-à-dire en se plaçant sur la variété V_5^8, c'est-à-dire en tenant compte de l'équation (3),

$$Z_{11}^2\lambda\mu - Z_{11}Z_{12}(\lambda + \mu) + Z_{12}^2 = 0,$$

ou

$$(Z_{11}\lambda - Z_{12})\ (Z_{11}\mu - Z_{12}) = 0,$$

ou encore

$$(Z_{11}\theta'_1 - Z_{12}\theta_1)\ (Z_{11}\theta'_2 - Z_{12}\theta_2) = 0$$

En tenant compte de l'équation (5) et en posant $\theta_2 = \rho\theta_1$, $\theta'_2 = \rho\ \theta'_1$, on a

$$Z_{11}\theta'_2 - Z_{12}\theta_2 = \rho(Z_{11}\theta'_1 - Z_{12}\theta_1)$$

et par conséquent dans l'intersection des hypersurfaces (3), (4) et (5), on trouve, en dehors des espaces (6), une variété double

$$(Z_{11}\theta'_1 - Z_{12}\theta_1)^2 = 0.$$

Observons que cette variété se trouve également sur les hypersurfaces

$$Z_{11}\theta'_2 - Z_{12}\theta_2 = 0, Z_{12}\theta'_1 - Z_{22}\theta_1 = 0, Z_{12}\theta'_2 - Z_{22}\theta_2 = 0$$

et a donc les équations

$$\left\| \begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & Z_{11} \\ \theta'_1 & \theta'_2 & Z_{12} \end{matrix} \right\| = 0 \quad \text{ou} \quad \left\| \begin{matrix} \theta_1 & \theta_2 & Z_{12} \\ \theta'_1 & \theta'_2 & Z_{22} \end{matrix} \right\| = 0.$$

C'est donc une variété cubique V_4^3 à quatre dimensions.

La variété V_4^3 est double pour la variété V_5^8 intersections des hypersurfaces (2) et (3).

3. Coupons maintenant la variété V_5^8 par l'hyperquadrique

$$Y_{02}Y_{13} - Y_{03}Y_{12} = 0.$$

Nous obtenons une variété V_4^{16} à quatre dimensions, d'ordre 16, possédant une variété double, à trois dimensions, d'ordre six.

Coupons la variété obtenue par un espace linéaire à cinq dimensions, S_5. Nous obtenons une surface F d'ordre 16, possédant une courbe double d'ordre six. Les adjointes à cette surface sont des hyperquadriques passant par la courbe double, distinctes des hyperquadriques contenant la surface. Il y a par conséquent une seule hyperquadrique adjointe, l'hyperquadrique (5).

La section de F par l'hyperplan $Z_{00} = 0$ est la courbe canonique, intersection de trois hyperquadriques, dans un espace à quatre dimensions, donc de genre cinq.

Liége, le 28 décembre 1966.