Bulletin de la Classe des sciences

Sur les variétés algébriques à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété algébrique à trois dimensions possède une surface canonique d'ordre zéro.

Sur les variétés algébriques à trois dimensions possédant une surface canonique d'ordre zéro

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété algébrique à trois dimensions possède une surface canonique d'ordre zéro.

On sait qu'une surface algébrique normale, régulière, possédant une courbe canonique d'ordre zéro est d'ordre $2\pi - 2$, à sections hyperplanes de genre π, dans un espace linéaire à π dimensions. Nous nous proposons dans cette note de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété algébrique à trois dimensions, irréductible, d'irrégularité superficielle nulle, possède une surface canonique d'ordre zéro. Nous obtenons le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une variété algébrique à trois dimensions, normale, irréductible, à irrégularité superficielle nulle, possède une surface canonique d'ordre zéro, est qu'elle soit d'ordre $\pi - 1$, ses sections curvilignes étant de genre π. La dimension n *de l'espace ambiant satisfait à l'inégalité*

$$3n \leq \pi + 6$$

et la variété appartient à $\frac{1}{2}n(n+1) - \pi$ *hyperquadriques.*

Pour établir que la condition est suffisante, nous établissons le lemme suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface algébrique normale irréductible ait pour système canonique le système de ses sections hyperplanes, est qu'elle soit d'ordre $\pi - 1$ et que ses *sections hyperplanes soient de genre π. La dimension de l'espace ambiant satisfait à la relation*

$$3n \leqslant \pi + 9.$$

Nous donnons en terminant quelques exemples.

1. Soit V_3^m une variété algébrique normale et irréductible, à trois dimensions, appartenant à un espace S_n à n dimensions. Nous supposons que l'irrégularité superficielle de cette variété est nulle, c'est-à-dire que les surfaces tracées sur la variété sont régulières.

Désignons par F les sections hyperplanes de la variété V_3^m et par C les sections curvilignes de cette variété, c'est-à-dire ses sections par des espaces linéaires à $n - 2$ dimensions. Deux surfaces F ont en commun une courbe C.

Nous nous proposons d'examiner dans quelles conditions la variété V_3^m possède une surface canonique d'ordre zéro, c'est-à-dire que tout système linéaire tracé sur la variété soit son propre adjoint. En particulier, le système $|F'|$ adjoint au système $|F|$ doit coïncider avec $|F|$.

2. Sur une surface F, le système canonique $|C|$ est découpé par les autres surfaces F et par conséquent le système bicanonique est découpé par les surfaces 2F c'est-à-dire par les hyperquadriques de S_n. Le système bicanonique étant l'adjoint au système canonique, les hyperquadriques doivent découper sur une courbe C la série canonique. Si on désigne par π le genre des courbes C, cette série est d'un côté d'ordre $2\pi - 2$ et d'un autre côté d'ordre $2m$. On a donc $m = \pi - 1$.

Puisque par hypothèse la variété $V_3^{\pi-1}$ est normale, le système $|F|$ est complet et les surfaces F, régulières, ont les genres $p_a = p_g = n$.

Les hyperplans découpent sur une courbe C une série spéciale d'ordre $\pi - 1$ et de dimension $n - 2$; d'après le théorème de Clifford, on a $2(n - 2) \leqslant \pi - 1$, c'est-à-dire $2n \leqslant \pi + 3$.

La variété V_3^m est d'ordre $m = \pi - 1$, π étant le genre d'une courbe C. Les sections hyperplanes F de $V_3^{\pi-1}$ ont les genres $p_a = p_g = n$, $p^{(1)} = \pi$ et la dimension n de l'espace ambiant satisfait à l'inégalité $2n \leqslant \pi - 3$.

3. Les hyperquadriques de l'espace S_{n-2} à $n - 2$ dimensions découpent sur la courbe C contenue dans cet espace la série canonique complète (puisque les surfaces F sont régulières) ; il existe donc

$$\delta = \frac{1}{2} n(n - 1) - \pi$$

hyperquadriques linéairement indépendantes de S_{n-1} contenant C.

Le système bicanonique $|2C|$ d'une surface F a la dimension

$$P_2 - 1 = p_a + p^{(1)} - 1 = n + \pi - 1$$

et est découpé par les hyperquadriques de l'hyperplan S_{n-1} contenant F. Il y a donc

$$\frac{1}{2} n(n + 1) - n - \pi = \frac{1}{2} n(n - 1) - \pi = \delta$$

hyperquadriques de l'espace S_{n-1} linéairement indépendantes contenant F.

Le système adjoint au système $|2F|$ est ce système lui-même et découpe sur une surface 2F le système canonique de celle-ci. Or, le genre arithmétique de la surface 2F est, d'après un théorème de Severi, égal à $2p_a + \pi = 2n + \pi$. Le nombre des hyperquadriques linéairement indépendantes de S_n contenant V_3 est donc

$$\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - 1 - (2n + \pi) = \delta.$$

La variété $V_3^{\pi-1}$ appartient à $\delta = \frac{1}{2} n(n - 1) - \pi$ hyperquadriques et une surface F ou une courbe C n'appartiennent pas à une hyperquadrique supplémentaire.

4. Nous allons maintenant démontrer qu'inversement, une variété algébrique à trois dimensions d'irrégularité superficielle nulle, normale, irréductible, d'ordre $\pi - 1$, à sections curvilignes de genre π, possède une surfaces canonique d'ordre zéro.

Nous commencerons par établir un lemme, à savoir que si une surface normale d'ordre $\pi - 1$, appartenant à un espace S_{n-1} à $n - 1$ dimensions, a des sections hyperplanes de genre π, son système canonique coïncide avec celui de ses sections hyperplanes.

Soient F la surface et C ses sections hyperplanes.

Observons que sur une courbe C section de F par un hyperplan S_{n-2}, les hyperplans découpent une série d'ordre $\pi - 1$ certainement spéciale, par conséquent les hyperquadriques découpent sur C la série canonique $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$. En répétant le raisonnement fait plus haut, on voit qu'il existe

$$\delta = \frac{1}{2} n(n - 1) - \pi$$

hyperquadriques linéairement indépendante de S_{n-2} contenant la courbe C.

Supposons que la courbe C soit situéé dans l'hyperplan $x_0 = 0$ et soient

$$\varphi_1(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0, \ \varphi_2 = 0, \ldots, \varphi_\pi = 0$$

les équations de π hyperquadriques de S_{n-1} linéairement indépendantes découpant sur C des groupes de la série canonique.

Le système adjoint à la courbe C sur F est découpé pai les hyperquadriques

$$x_0(\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1}) + \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2 + \ldots + \mu_\pi \varphi_\pi = 0. \quad (1)$$

Répétons le même raisonnement en supposant que la courbe C soit située dans l'hyperplan $x_1 = 0$ et soient

$$\varphi_1'(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0, \quad \varphi_2' = 0, \ldots, \varphi_\pi' = 0$$

des hyperquadriques linéairement indépendantes découpant sur C des groupes canoniques. Le système adjoint à la courbe C est cette fois découpé sur F par les hyperquadriques

$$\begin{aligned} x_1(\lambda_0' x_0 + \lambda_1' x_1 + \ldots + \lambda_{n-1}' x_{n-1}) + \\ \mu_1' \varphi_1' + \mu_2' \varphi_2' + \ldots + \mu_\pi' \varphi_\pi' = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Les systèmes (1) et (2) doivent coïncider. Les systèmes considérés contiennent tous deux le système des sections hyperplanes de F et par conséquent les systèmes $\Sigma\lambda_i\varphi_i = 0$ et $\Sigma\lambda_i'\varphi_i' = 0$ doivent coïncider. Il en résulte que les systèmes d'hyperquadriques contenant deux courbes C et par conséquent toute courbe C doivent coïncider. Il en résulte que la surface F appartient à

$$\frac{1}{2} n(n + 1) - n - \pi = \delta$$

hyperquadriques.

Cela étant, l'adjoint $|C'|$ au système $|C|$ des sections hyperplanes de F est découpé sur cette surface par les hyperquadriques et on a

$$|C'| = |2C|,$$

d'oû $|C' - C| = |C|$. Le système canonique de F est le système $|C|$, c'est-à-dire le système des sections hyperplanes de F. Cette surface a donc les genres $p_a = p_g = n$, $p^{(1)} = \pi$.

5. Il est maintenant aisé d'achever la démonstration du théorème concernant la variété $V_3^{\pi-1}$.

Une section hyperplane de $V_3^{\pi-1}$ est une surface F ayant pour système canonique celui de ses sections hyperplanes, c'est-à-dire celui découpé par les autres surfaces F. On a donc

$$|F'| = |F|$$

et la surface canonique de la variété $V_3^{\pi-1}$ est d'ordre zéro.

6. Nous avons trouvé plus haut en utilisant le théorème de Clifford l'inégalité

$$2n \leqslant \pi + 3.$$

On connaît pour une surface l'inégalité de Noether

$$p^{(1)} \geqslant 2p_g - 3$$

qui donne, appliquée à la surface F, l'inégalité précédente.

Observons que l'inégalité de Noether tient compte du fait que le système canonique peut être composé au moyen d'une involution. Si cette circonstance ne se présente pas, Castelnuovo a montré que l'on a [1]

$$p^{(1)} \geqslant 3p_g - 6$$

qui donne, appliquée à la surface F,

$$3n \leqslant \pi + 6. \tag{1}$$

Supposons que les courbes C tracées sur une surface F et passant par un point passent en conséquence par $\nu - 1$ autres

[1] *Osservazioni intorno alla Geometria sopra una superficie*, Nota II (Rendiconti del Istituto Lombardo, 1891 ; Memorie scelte (Bologna, Zanichelli, 1937, pp. 255-265).

points et que cette particularité se présente pour toutes les surfaces F. Alors les courbes C passant par un point passent en conséquence par $\nu - 1$ autres points qui appartiennent à toutes les surfaces F passant par ce point. Mais dans ces conditions il existe sur la variété $V_3^{\pi-1}$ une involution d'ordre ν avec laquelle le système $|F|$ est composé. Mais alors, la variété $V_3^{\pi-1}$ serait réductible à une variété multiple d'ordre ν, contrairement à l'hypothèse qu'elle est irréductible.

7. Dans la note qui vient d'être citée, Castelnuovo avait construit des surfaces dont le système canonique était celui des sections hyperplanes. Nous en déduisons des variétés à surface canonique d'ordre zéro.

La variété V_3^5 de $S_4 (n = 4, \pi = 6)$.

La variété V_3^8 de S_5 intersection d'une hyperquadrique et d'une hypersurface du quatrième ordre $(n = 5, \pi = 9)$.

La variété V_3^{14} obtenue, dans S_7, de la manière suivante : On considère le cône V_4^4 ayant pour sommet une droite et dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese. La variété V_3^{14} est l'intersection de ce cône et d'une hypersurface du quatrième ordre contenant un cône du second ordre appartenant au cône V_4^4. On a $n = 7$, $\pi = 15$.

Signalons d'autre part, dans S_2, l'intersection V_3^{16} de quatre hyperquadriques $(n = 7, \pi = 17)$.

En voici encore un autre exemple. Considérons dans un espace S_9 la variété de Veronese représentant les quadriques d'un espace S_3. La section de cette variété par une hypersurface cubique correspond à une surface du sixième ordre de S_3 dont les adjointes sont les quadriques. La surface considérée dans S_9 a donc pour système canonique celui de ses sections hyperplanes. Cela étant, considérons dans un espace S_{10} à dix dimensions la section d'un cône V_4^8 projetant d'un point une variété V_3^8 de Veronese située dans un hyperplan, par une hypersurface cubique V_9^3. Cette section est une variété V_3^{24} possédant une surface canonique d'ordre zéro. Le système $|F|$ de ses sections hyperplanes est son propre adjoint.

Liège, le 21 juillet 1965.