Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de variétés algébriques privées de variété canonique mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro, obtenues en généralisant une construction de la surface d'Enriques.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques généralisant la surface d'Enriques

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de variétés algébriques privées de variété canonique mais possédant une variété bicanonique d'ordre zéro, obtenues en généralisant une construction de la surface d'Enriques.

On sait qu'un modèle projectif de la surface d'Enriques ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) est la surface du dixième ordre qui représente sur l'hyperquadrique de Klein de S_5, la congruence lieu des droites qui appartiennent à un faisceau de quadriques d'un système linéaire triplement infini de quadriques, dépourvu de points-base. Si $|Q|$ est ce système de quadriques, sa jacobienne est aussi le lieu des couples de points conjugués par rapport à toutes les quadriques du système. Ces couples de points forment une involution dont l'image est la surface d'Enriques dont il vient d'être question (1).

On peut considérer, dans un espace linéaire à $n+1$ dimensions, un système linéaire d'hyperquadriques de dimension $n+1$, privé

(1) Voir notre note *Recherches sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre un* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1927, pp. 114-133). Au sujet des surfaces de genres zéro et de bigenre un, consulter: ENRIQUES, *Sopra le superficie di bigenre uno* (MEMORIE DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE, detta dei XL, 1906, pp. 327-352); FANO, *Superficie algebriche di genere zero e bigenere uno* (RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO, 1° sem. 1910, pp. 98-118); BURNIAT, *Recherches sur les surfaces de bigenre un* (MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROY. DES SCIENCES DE LIÈGE, 1936, pp. 1-104).

de points-base, et l'ensemble des couples de points conjugués par rapport à toutes les hyperquadriques du système. Ces couples de points appartiennent à la jacobienne du système linéaire d'hyperquadriques. Ils forment une involution privée de points unis et la variété image de cette involution généralise la surface d'Enriques. En utilisant le théorème que nous avons établi récemment (1), à savoir qu'une involution cyclique d'ordre p privée de points unis, appartenant à une variété algébrique à n dimensions complètement régulière, jouit de la propriété suivante : Le système canonique de la variété contient p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution dont l'un correspond au système canonique de la variété image de l'involution. Ce système est celui de dimension maximum si n est impair, celui de dimension minimum si n est pair. Nous établissons précisément le théorème suivant :

La variété jacobienne d'un système linéaire $|Q|$ *d'hyperquadriques, dépourvu de points-base et de dimension* $n+1$ *dans un espace linéaire à* $n+1$ *dimensions, contient une involution du second ordre formée par les couples de points conjugués par rapport à toutes les hyperquadriques du système* $|Q|$. *Cette involution est privée de points unis et a pour image une variété à* n *dimensions sur laquelle :*

Si n *est pair, tout système linéaire de variétés à* $n-1$ *dimensions est distinct de son adjoint mais coïncide avec son biadjoint* ($P_g = 0$, $P_2 = 1$).

Si n *est impair, tout système linéaire de variétés à* $n-1$ *dimensions est son propre adjoint* ($P_g = P_2 = 1$).

On peut obtenir un modèle projectif de ces variétés images dans la variété de Grassmann qui représente les droites de l'espace à $n+1$ dimensions.

Nous commencerons par démontrer le théorème dans le cas $n = 2$ en utilisant la méthode employée dans le cas où n est quelconque.

1. Soit $|Q|$ un système linéaire de quadriques de dimension trois, privé de points-base. La jacobienne F de ce système est le lieu des couples de points conjugués par rapport à toutes les quadriques du système $|Q|$. Ces couples de points forment une involution I

(1) *Involutions cycliques privées de points unis appartenant à une variété algébrique complètement régulière* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1968, pp. 653-661).

privée de points unis puisque $|Q|$ est privé de points-base. Nous désignerons par T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution I. La surface F est du quatrième ordre et a les genres $p_a = P_4 = 1$ et tout système linéaire de courbes tracé sur F est son propre adjoint.

On peut construire sur F un système linéaire $|C|$ transformé en lui-même par T et contenant deux systèmes linéaires partiels $|C_1|$, $|C_2|$ appartenant à l'involution I. Soient r_1, r_2 les dimensions de ces systèmes.

Aux systèmes $|C_1|$, $|C_2|$ correspondent sur une surface Φ image de l'involution I, des systèmes linéaires complets que nous désignerons par $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$.

La série canonique d'une courbe C_1 contient deux séries linéaires appartenant à l'involution I et celle dont la dimension est la plus grande est la transformée de la série canonique de la courbe Γ_1 homologue. D'une manière précise, si π désigne le genre des courbes Γ_1 et par suite si le genre des courbes C_1 et C est $2\pi - 1$, la première série a la dimension $\pi - 1$ et la seconde la dimension $\pi - 2$.

Deux cas peuvent se présenter :

1° La série canonique d'une courbe Γ_1 est découpée par les autres courbes du système $|\Gamma_1|$ et la seconde est découpée par les courbes du système $|\Gamma_2|$.

2° La série canonique d'une courbe Γ_1 est découpée par les courbes Γ_2.

Dans le premier cas, la dimension du système $|\Gamma_1|$ est π et celle du système $|\Gamma_2|$ est $\pi - 2$. Mais les courbes C_2 ayant le genre $2\pi - 1$, les courbes Γ_2 ont le genre π et la série découpée sur une courbe Γ_2 par les courbes Γ_1 a la dimension π, ce qui est absurde. Le premier cas ne peut se présenter.

Dans le second cas, les courbes Γ_1 découpent sur l'une d'entre elles une série paracanonique, de dimension $\pi - 2$ et $|\Gamma_1|$ a la dimension $\pi - 1$. Il en est de même de $|\Gamma_2|$ et on a

$$|\Gamma'_1| = |\Gamma_2|, |\Gamma'_2| = |\Gamma_1|, |\Gamma''_1| = |\Gamma'_2| = |\Gamma_1|.$$

La surface Φ est dépourvue de courbe canonique mais possède une courbe bicanonique d'ordre zéro.

Il est facile de voir que l'on a

$$p_g = P_3 = \cdots = P_{2i+1} = \cdots = 0, P_2 = P_4 = \cdots = P_{2i} = \cdots = 1.$$

Pour déterminer l'ordre du modèle projectif de la surface Φ situé sur l'hyperquadrique de Klein, observons que si π est le genre des sections hyperplanes G de la surface, comme le système $|2G|$ est son propre adjoint, la surface a l'ordre $2\pi - 2$. D'autre part, les courbes G découpant sur l'une d'entre elles une série paracanonique, $|G|$ a la dimension $\pi - 1 = 5$, d'où $2\pi - 2 = 10$ et la surface Φ a l'ordre 10.

2. Considérons dans un espace linéaire S_{n+1} à $n + 1$ dimensions un système linéaire $|Q|$ d'hyperquadriques de dimension $n + 1$ et privé de points-base. L'hypersurface jacobienne V de $|Q|$ est d'ordre $n + 2$ et ses systèmes canonique et pluricanonique sont d'ordre zéro. Sur V, tout système linéaire de variétés à $n - 1$ dimension est son propre adjoint.

La variété V est le lieu des couples de points conjugués par rapport à toutes les hyperquadriques du système $|Q|$ et ces couples de points forment une involution I privée de points unis, car un tel point serait un point-base de $|Q|$. Nous désignerons par T la transformation birationnelle de V en soi génératrice de l'involution I et par Ω la variété à n dimensions image de cette involution.

Il est toujours possible de construire sur V un système linéaire $|F|$ de variétés à $n - 1$ dimensions transformé en lui-même par T et contenant deux systèmes $|F_1|$, $|F_2|$ appartenant à l'involution I. Le système $|F|$ est son propre adjoint et sur une de ses variétés, les autres variétés du système découpent le système canonique complet.

Aux systèmes $|F_1|$, $|F_2|$ correspondent sur Ω deux systèmes linéaires complets $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$ de variétés à $n - 1$ dimensions. Nous désignerons par r_1, r_2 les dimensions respectives de ces systèmes.

Sur une variété $\overline{F}_1$ de $|F_1|$, il existe deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I, l'un $|\overline{F}_1, F_1|$ est découpé par les variétés F_1, l'autre $|\overline{F}_1, F_2|$ est découpé par les variétés F_2. Tous deux appartiennent au système canonique de $\overline{F}_1$.

De même, sur une variété $\overline{F}_2$ de $|F_2|$ il existe deux systèmes linéaires $|\overline{F}_2, F_1|$ et $|\overline{F}_2, F_2|$ appartenant à l'involution I, découpés par les variétés F_1 et F_2

Sur la variété $\overline{\Phi}_1$ homologue de $\overline{F}_1$ on a deux systèmes linéaires complets $|\overline{\Phi}_1, \Phi_1|$, $|\overline{\Phi}_1, \Phi_2|$ dont l'un est le système canonique de $\bar{\Phi}_1$ et sur la variété $\bar{\Phi}_2$ homologue de $\bar{F}_2$, deux systèmes linéaires complets $|\bar{\Phi}_2, \Phi_1|$ et $|\bar{\Phi}_2, \Phi_2|$ dont l'un est le système canonique de $\bar{\Phi}_2$.

3. Supposons que le système canonique de $\bar{\Phi}_1$ soit $|\bar{\Phi}_1, \Phi_1|$. Alors, le système $|\Phi_1|$ est son propre adjoint et il en est de même de $|\Phi_2|$.

Si $n-1$ est pair, le système $|\bar{\Phi}_1, \Phi_1|$ a la dimension $r_1 - 1$ et le système $|\bar{\Phi}_1, \Phi_2|$ la dimension r_1. On a donc $r_1 = r_2$. Le système $|\bar{\Phi}_2, \Phi_2|$ de $\bar{\Phi}_2$ a la dimension $r_1 - 1 = r_2 - 1$ et le système $|\bar{\Phi}_2, \Phi_1|$ la dimension r_1.

Si n est impair, la variété Ω possède une variété canonique d'ordre zéro.

Si $n-1$ est impair, le système $|\bar{\Phi}_1, \Phi_2|$ a la dimension $r_1 - 2 = r_2$. En intervertissant les rôles de $|\Phi_1|$ et $|\Phi_2|$, on obtiendrait de même $r_2 - 2 = r_1$, d'où absurdité.

Supposons maintenant que le système canonique de la variété $\bar{\Phi}_1$ soit $|\bar{\Phi}_1, \Phi_2|$.

Si $n-1$ est pair, le système canonique de $\bar{\Phi}_1$ ayant la dimension r_2, le système $|\bar{\Phi}_1, \Phi_1|$ doit avoir la dimension $r_2 + 1 = r_1 - 1$. En intervertissant les rôles de $|\Phi_1|$, $|\Phi_2|$, on obtiendrait de même $r_1 + 1 = r_2 - 1$, car le système canonique de $\bar{\Phi}_2$ doit être $|\bar{\Phi}_2, \Phi_1|$, d'où absurdité.

Si $n-1$ est impair, la dimension de $|\bar{\Phi}_1, \Phi_2|$ doit dépasser d'une unité celle de $|\bar{\Phi}_1, \Phi_1|$ et on a $r_1 = r_2$.

Si n est pair, deux variétés Φ_1, Φ_2 se rencontrent suivant une variété canonique pour chacune d'elles.

4. Dans le cas où n est pair, on a donc

$$|\Phi_1'| = |\Phi_2|, |\Phi_2'| = |\Phi_1|$$

et par suite

$$|\Phi_1''| = |\Phi_2'| = |\Phi_1|.$$

Sur Ω, tout système linéaire de variétés à $n-1$ dimensions coïncide avec son biadjoint mais est distinct de son adjoint. La variété est dépourvue de variété canonique mais possède une variété bicanonique d'ordre zéro. On a

$$P_1 = P_3 = \ldots = P_{2i+1} = \ldots = 0, \quad P_2 = P_4 = \ldots = P_{2i} = \ldots = 1.$$

5. Un modèle projectif de la variété Ω est constitué par le système Σ des droites joignant les points P, P′ conjugués par rapport aux hyperquadriques de $|Q|$. Les hyperplans polaires de P par rapport aux hyperquadriques Q passent par P′ et ceux de P′ passent par P. Il y a ∞^{n-1} de ces hyperplans qui sont confondus et par conséquent il y a ∞^{n-1} hyperquadriques de $|Q|$ qui contiennent la droite PP′. Le système Σ est donc le lieu des droites de S_{n+1} qui appartiennent à ∞^{n-1} hyperquadriques de $|Q|$.

On peut représenter le système Σ sur la variété de Grassmann W, à $2n$ dimensions et d'ordre $(2n)! : (n+1)\,(n!)^2$, appartenant à un espace S_ρ à $\rho = n(n+3) : 2$ dimensions. On sait que la variété W appartient à l'intersection de $n(n-1) : 2$ hyperquadriques (¹) linéairement indépendantes.

Représentons par

$$f_0(y,z) = 0, f_1(y,z) = 0, \cdots, f_{n+1}(y,z) = 0 \tag{1}$$

les polarités par rapport à $n+2$ hyperquadriques linéairement indépendantes de $|Q|$.

Si une droite de S_{n+1} appartient à ∞^{n-1} hyperquadriques de $|Q|$, ces hyperquadriques déterminent sur la droite ∞^1 couples de points formant une involution.

Les couples de points déterminés sur une droite par les hyperquadriques de $|Q|$ sont donnés par

$$f_i(y,y) + \lambda f_i(y,z) + \lambda^2 f_i(z,z) = 0.$$

La condition cherchée s'écrit donc

$$\left\| \begin{matrix} f_0(y,y) & f_1(y,y) & \cdots f_{n+1}(y,y) \\ f_0(y,z) & f_1(y,z) & \cdots f_{n+1}(y,z) \\ f_0(z,z) & f_1(z,z) & \cdots f_{n+1}(z,z) \end{matrix} \right\| = 0.$$

Un déterminant à neuf éléments tiré de cette matrice, développé, donne une équation du troisième degré par rapport aux coordonnées pluckériennes des droites de S_{n+1}. La variété Ω qui représente Σ sur la variété W appartient donc à $n(n+1)\,(n+2) : 6$ hypersurfaces cubiques.

(¹) BERTNI, *Geometria Proiettiva degli Iperspazi* (Pisa, Spoeri 1907), voir p. 37.

6. Désignons par Ψ_1 les sections hyperplanes de la variété Ω de W. A ces sections correspondent sur V des variétés G_1 appartenant à un système linéaire complet $|G|$ qui contient un second système partiel $|G_2|$ appartenant à l'involution I. Aux variétés G_2 correspondent sur Ω des variétés Ψ_2.

Une variété G_1 est le lieu des couples de points de l'involution I situés sur des droites appartenant à un complexe linéaire de S_{n+1}.

Sur une variété Ψ_1, le système canonique est découpé par les variétés Ψ_1 si n est impair ou par les variétés Ψ_2 si n est pair. Par conséquent, le genre géométrique p_g d'une variété Ψ_1 est

$$p_g = (n+1)(n+2) : 2 \text{ si } n \text{ est pair,}$$

$$p_g = n(n+3) : 2 \text{ si } n \text{ est impair.}$$

7. L'ordre de la variété Ω à n dimensions appartenant à la variété de Grassmann W à $2n$ dimensions est égal au nombre de points d'intersection de Ω avec un espace linéaire à $\rho - n$ dimensions, intersection de n hyperplans de S_ρ linéairement indépendants. Le double de cet ordre est le degré du système $|G_1|$ ou du système $|G_2|$.

Dans le but de déterminer ces degrés, nous définirons la transformation T de V en soi.

Considérons les $n+1$ premières polarités (1) définissant V. On peut résoudre ces équations par rapport à $y_0, y_1, \ldots, y_{n+1}$ et ces quantités sont proportionnelles aux déterminants de la matrice

$$\left\| \frac{\partial f_i}{\partial y_0} \ \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \ \ldots \ \frac{\partial f_i}{\partial y_{n+1}} \right\| \qquad (2)$$

$$(i = 0, 1, \cdots, n)$$

le déterminant correspondant à y_i étant celui obtenu en supprimant les dérivées par rapport à y_i.

On obtient ainsi une transformation birationnelle qui donne sur V la transformation T et que nous continuerons à désigner par T [1].

[1] Nous avons étudié autrefois la correspondance birationnelle entre deux espaces projectifs à r dimensions dans laquelle deux points homologues sont conjugués dans r réciprocités. Ici, les réciprocités sont des polarités, mais les propriétés que nous utilisons restent valables. Voir notre note *Sur une correspondance crémonienne entre deux espaces à* n *dimensions* (Rendiconti del Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, 1910, pp. 116-119).

Aux hyperplans de S_{n+1} correspondent des variétés d'ordre $n+1$ passant par la variété M_{n-1} d'ordre $(n+1)(n+2):2$ dont les équations s'obtiennent en annulant la matrice (2).

Il est facile de voir qu'à un point de M_{n+1} correspondent les points d'une droite s'appuyant en $n+1$ points sur M_{n-1}. Le lieu de ces droites est une variété M_n à n dimensions, d'ordre $n(n+2)$ passant $n+1$ fois par la variété M_{n-1}. Par un point de cette variété passent $n+1$ droites de M_n s'appuyant encore en n points sur M_{n-1}.

A la variété V, d'ordre $n+2$, correspond une variété d'ordre $(n+1)(n+2)$ contenant la variété M_n et complétée par la variété V elle-même.

A une droite, T fait correspondre une courbe d'ordre $n+1$ s'appuyant en $n(n+2)$ points sur la variété M_{n-1}. Si cette droite appartient au complexe Σ, la courbe correspondante rencontre cette droite en deux points formant un groupe de l'involution I.

8. A un hyperplan de S_ρ correspond dans S_{n+1} un complexe linéaire de droites, c'est-à-dire un système-nul dont nous écrirons l'équation sous la forme

$$\varphi(y,z)=0.$$

Considérons l'hypersurface d'ordre $n+2$ d'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y_{n+1}} \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial y_0} & \dfrac{\partial f_i}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_i}{\partial y_{n+1}} \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

La transformation T lui fait correspondre, en dehors de la variété M_n, une hypersurface R d'ordre $n+2$, passant par M_{n-1}.

L'hypersurface (3) coupe V suivant une variété G_1 et l'hypersurface R suivant une variété G_2.

A n hyperplans indépendants de S_ρ correspondent dans S_{n+1} n hypersurfaces analogues à (3) et par suite n hypersurfaces R_1, R_2, ..., R_n d'ordre $n+2$. Ces dernières découpent sur V n courbes G_2. Le degré de $|G_2|$ sera donc égal au nombre de points communs aux hypersurfaces R_1, R_2, ..., R_n et V.

Pour évaluer ce nombre, nous utiliserons le principe de la conservation du nombre en supposant que les $n+1$ hypersurfaces en question se réduisent toutes à un hyperplan augmenté d'une hypersurface d'ordre n passant par M_{n-1}.

Supposons que les $n+1$ surfaces soient formées de $n+1-r$ hyperplans et de $n+1-r$ hypersurfaces d'ordre n passant par M_{n-1}. L'intersection de ces hypersurfaces est la transformée par T d'un espace linéaire à $n+1-r$ dimensions. Nous avons établi que cette variété, en dehors de M_{n-1}, a l'ordre $\binom{n+1}{r}$. D'autre part, il existe $\binom{n+1}{r}$ combinaisons de $n+1$ hyperplans r à r. On en conclut que le degré de $|G_2|$ est

$$\sum_{r=0}^{n+1}\binom{n+1}{r}^2.$$

L'ordre de la variété Ω est la moitié de ce nombre, donc cet ordre est :
Si n est pair et égal à 2ν,

$$\sum_{r=0}^{\nu}\binom{2\nu+1}{r}^2.$$

si n est impair et égal à $2\nu+1$,

$$\frac{1}{2}\binom{2\nu+2}{\nu+1}^2+\sum_{r=0}^{\nu}\binom{2\nu+2}{r}^2.$$

Pour $n=2$, on retrouve le modèle projectif de la surface d'Enriques, d'ordre 10, dans S_5.

Pour $n=3$, on obtient une variété à trois dimensions Ω d'ordre 35, située sur la variété de Grassmann W d'ordre cinq, dans un espace S_9. Les sections hyperplanes de cette variété sont des surfaces dont le système canonique coïncide avec le système des sections hyperplanes. Ces surfaces ont le genre géométrique $p_g=9$ et le genre linéaire 36.

Pour $n=4$, on obtient une variété Ω à quatre dimensions d'ordre 126 dans un espace S_{14} tracée sur la variété de Grassmann d'ordre 14. Cette variété est dépourvue de variété canonique mais les hyperquadriques découpent sur elle le système bicanonique.

Liège, le 19 novembre 1968.

Erratum : page 656, troisième ligne en bas, lire ...... la dimension de $|\Phi_0|$ est