Bulletin de la Classe des sciences

Variétés algébriques images d'involutions cycliques

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une variété image d'une involution cyclique et détermination de son système canonique.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Variétés algébriques images d'involutions cycliques

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction d'une variété image d'une involution cyclique et détermination de son système canonique.

Pour qu'une variété algébrique soit l'image d'une involution cyclique, il faut qu'elle possède certaines singularités et qu'elle soit l'enveloppe d'un certain système d'hypersurfaces. Ainsi, pour qu'une surface du quatrième ordre soit l'image d'une involution cyclique d'ordre deux, il faut qu'elle possède huit points doubles et qu'elle soit l'enveloppe d'un système de quadriques d'indice deux passant par les huit points doubles. Une surface du quatrième ordre possédant huit points doubles n'est pas nécessairement l'image d'une involution cyclique. Dans cette note, nous construisons une variété algébrique image d'une involution cyclique pour laquelle la seconde condition est une conséquence de l'existence des singularités.

Soient deux variétés de Veronese généralisées, représentant les hypersurfaces d'ordre p de deux espaces linéaires à n dimensions. Supposons que les espaces linéaires de dimension minimum contenant ces variétés ne se rencontrent pas. La section Ω_{2n} par une hypersurface de la variété à $2n+1$ dimensions lieu des droites s'appuyant sur les deux variétés de Veronese représente une involution cyclique d'ordre p appartenant à une variété algébrique à $2n$ dimensions.

La variété Ω_{2n} possède deux variétés à $n-1$ dimensions multiples d'ordre p^n. Nous déterminons le système adjoint à Ω_{2n} et la multiplicité de ces variétés pour les adjointes.

1. Considérons dans un espace linéaire à n dimensions S_n les hypersurfaces d'ordre p. Elles sont au nombre de $r+1=\binom{n+p}{p}$ linéairement indépendantes. Rapportons-les projectivement aux hyperplans d'un espace S_r à r dimensions. Aux points de S_n correspondent les points d'une variété de Veronese généralisée θ_n, d'ordre p^n.

Soient, dans un espace linéaire S_{2r+1} à $2r+1$ dimensions, deux espaces à r dimensions S_r, S'_r ne se rencontrant pas. Dans S_r, nous considérons une variété de Veronese généralisée θ_n et dans S'_r, une variété analogue θ'_n.

La projection de la variété θ_n à partir de S'_r est une variété V_{r+n+1} à $r+n+1$ dimensions, d'ordre p^n passant p^n fois par θ'_n. La projection de θ'_n à partir de S_r est une variété analogue V'_{r+n+1} d'ordre p^n, passant p^n fois par θ_n.

L'intersection des variétés V_{r+n+1} et V'_{r+n+1} est une variété V_{2n+1}, à $2n+1$ dimensions, d'ordre p^{2n}, passant p^n fois par chacune des variétés θ_n, θ'_n. Cette variété est le lieu des droites s'appuyant sur θ_n et θ'_n.

Si nous désignons par $y_0, y_1, \ldots, y_n$ les coordonnées des points de S_n, rapporter projectivement les hypersurfaces d'ordre p de S_n aux hyperplans d'un espace à r dimensions revient à prendre pour coordonnées des points de cet espace des quantité $Y_0, Y_1, \ldots, Y_r$ proportionnelles aux combinaisons avec répétition p à p des nombres y.

Soit S'_n un espace à n dimensions dont nous désignerons les coordonnées par $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Nous prendrons pour coordonnées ponctuelles de S'_r des quantités $Z_0, Z_1, \ldots, Z_r$ proportionnelles aux combinaisons avec répétition p à p des nombres z.

Cela étant, nous pouvons choisir les espaces S_n, S'_n de manière qu'ils ne se rencontrent pas. Dans ces conditions, ils appartiennent à un espace S_{2n+1} à $2n+1$ dimensions.

Soient a une droite de la variété V_{2n+1} et A, A′ ses points d'appui sur θ_n et θ'_n. Aux points A, A′ correspondent des points A_1 de S_n et A'_1 de S'_n bien déterminés. A la droite a, on peut donc faire correspondre la droite $a' = A_1A'_1$. Inversement, à une droite a' s'appuyant sur S_n, S'_n, correspond une droite a s'appuyant sur θ_n, θ'_n. Aux droites de V_{2n+1} correspondent donc birationnellement les droites s'appuyant sur S_n et S'_n.

2. Soit V_{2r}^m une hypersurface d'ordre m de S_{2r+1}. Elle coupe la variété V_{2n+1} suivant une variété Ω_{2n} à $2n$ dimensions, d'ordre mp^{2n}.

L'équation de V_{2r}^m est un polynome en Y, Z égalé à zéro. Convenons de représenter par $F_{n-i,i}(Y, Z)$ un polynome de degré $n-i$ par rapport aux Y dont les coefficients sont des polynomes de degré i par rapport aux Z. L'équation de V_{2n}^m s'écrit

$$F_{m,o}(Y,Z) + F_{m-l,l}(Y,Z) + \cdots F_{i,m-i}(Y,Z) + \cdots + F_{o,m}(Y,Z) = 0.$$

Dans cette équation, remplaçons les Y et les Z par leurs expressions en y et z et représentons par $\Phi_{m-i,i}(y, z)$ ce que devient $F_{m-i,i}(Y, Z)$ après cette substitution. L'équation

$$\Phi_{m,o}(y,z) + \Phi_{m,1}(y,z) + \cdots + \Phi_{mi,i}(y,z) + \cdots \Phi_{om}(y,z) = 0$$

représente dans S_{2n+1} une hypersurface V_{2n}^{mp} d'ordre mp, transformée en soi par l'homographie H d'équations

$$\rho y_i' = y_i, \rho z_i' = \varepsilon z_i, (t = 0,1,\cdots,n).$$

où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

A un groupe de l'involution I engendrée sur la variété V_{2n}^{mp} par l'homographie H, correspond un point de la variété Ω_{2n}.

L'involution cyclique d'ordre p *engendrée sur la variété* V_{2n}^{mp} *par l'homographie* H *a pour image la variété* Ω_{2n}.

On notera que l'involution I a pour points unis les points d'intersection de la variété V_{2n}^{mp} avec les espaces S_n, S_n'. Les points de diramation de la variété Ω_{2n} sont les points d'intersection de cette variété avec les variétés θ_n, θ_n'. Ce sont des variétés d'ordre mp^n, à $n-1$ dimensions, multiples d'ordre p^n pour Ω_{2n}.

3. Nous allons maintenant déterminer le système canonique de la variété Ω_{2n} et plus précisément, les systèmes canoniques des sections de cette variété par des espaces linéaires. Cela nous donnera certaines conditions auxquelles n, p et m sont assujettis.

A une variété canonique de Ω_{2n} correspond une variété canonique de V_{2n}^{mp}. Or, sur cette variété, les variétés canoniques sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $mp - 2(n+1)$. Nous devons donc avoir

$$mp > 2(n + 1).$$

Un espace linéaire à $2(r-n) + 1 + i$ coupe Ω_{2n} suivant une variété à i dimensions que nous désignerons par Ω_i. Observons que pour

$i \leqslant n$, la variété Ω_i n'a pas en général de points de diramation. Pour $i > n$, la variété Ω_i rencontre les variétés θ_n, θ'_n suivant des variétés à $i-1$ dimensions qui sont de diramation.

A la section de la variété V_{2n+1} de S_{2r+1} par un hyperplan correspond dans S_{2n+1} une hypersurface V^p_{2n} transformée en elle-même par H et rencontrant chacun des espaces S_n, S'_n suivant des hypersurfaces d'ordre p. En effet, l'équation d'un hyperplan de S_{2r+1} s'écrit

$$F_{1,0}(y,z) + F_{0,1}(Y,Z) = 0$$

et il lui correspond une variété d'équation de la forme

$$\varphi_{1,0}(y,z) + \varphi_{0,1}(y,z) = 0$$

homogène de degré p en y et en z.

4. Considérons la section de Ω_{2n} par un espace linéaire de dimension $2(r-n)+3$, intersection de $2n-2$ hyperplans. C'est une surface Ω_2 qui ne rencontre pas les variétés θ_n, θ'_n. A Ω_2 correspond dans S_{2n+1} une surface V_2 intersection de V^{mp}_{2n} et de $2(n-1)V^p_{2n}$ correspondant à des hyperplans, qui ne rencontre pas les espaces S_n, S'_n.

Les courbes canoniques de V_2 sont découpées par les hypersurfaces d'ordre

$$mp + 2(n-1)p - 2(n+1)$$

et celles qui correspondent aux courbes canoniques de Ω_2 sont découpées par des hypersurfaces transformées en elles-mêmes par l'homographie H.

Posons

$$n + 1 = hp - k \quad (0 \leqslant k < p)$$

si $n+1$ est supérieur à p et

$$p = n + 1 - k \quad (0 \leqslant k < p)$$

si $n+1$ est inférieur à p.

Dans le premier cas, les transformées des courbes canoniques de Ω_2 sont découpées sur V_2 par des hypersurfaces d'ordre $mp - 2(n-h-1)p + 2k$ et dans le second par des hypersurfaces d'ordre $mp + 2(n-2) + 2k$.

En posant

$$\alpha = m + e(m - h\,1 \text{ ou } \alpha = m + 2(n - 2)$$

suivant que $n + 1$ est supérieur ou inférieur à p, considérons les courbes découpées sur V_2 par les hypersurfaces V^p_{2n} et les hypersurfaces découpées par les hypersurfaces d'ordre $2k$, V^{2k}_{2n}, transformées en elles-mêmes par H. On peut dire que les courbes canoniques de V_2 transformées des courbes canoniques de Ω_2 sont découpées par les hypersurfaces $V^p_{2n} + V^{2k}_{2n}$ ne contenant pas V_2.

Dans la construction de l'hypersurface V^{2k}_{2n}, les espaces S_n, S'_n doivent jouer des rôles symétriques, par conséquent, une telle hypersurface est représentée par une équation de degré k séparément par rapport aux y et aux z. Entre les espaces S_n et S'_n, V^{2k}_{2n} établit une liaison T faisant correspondre à un point d'un des espaces une courbe d'ordre k de l'autre. La variété V^{2k}_{2n} est le lieu des droites joignant les points de S_n, S'_n homologues dans T.

Si l'on observe qu'à une hypersurface d'ordre k de S_n (ou de S'_n) correspond sur θ_n (ou θ'_n) une variété A (ou A') à $n - 1$ dimensions d'ordre kp^{n-1}, on voit que la correspondance T' homologue de T dans S_{2r+1} fait correspondre à un point de θ_n une variété A' de θ'_n et inversement. Le lieu des droites joignant les points homologues de θ_n, θ'_n dans la correspondance T' correspond à la variété V^{2k}_{2n}. C'est une variété A_0 à n dimensions, d'ordre $2kp^{n-1}$.

Si l'on multiplie les deux membres de l'équation d'une hypersurface V^{2k}_{2n} par une combinaison de degré $p - k$ des y et par une combinaison de degré $p - k$ des z, le passage des y, z aux Y, Z nous donne l'équation d'une hypersurface $\overline{W}$ rencontrant V_{2n+1} suivant la variété A_0. On effectuera cette opération de toutes les manières possibles de façon à obtenir une famille d'hypersurfaces $\overline{W}$ ayant comme base A_0.

Le passage des y et z aux Y, Z fait correspondre à la variété V^{2p}_{2n} une variété W^{α}_{2r} de S_{2r+1}. On voit donc que

Le système canonique de la surface Ω_2 section de Ω_{2n} par un espace à $2n - 2$ dimensions est découpé par les hypersurfaces $\overline{W} + W^{\alpha}_{2r}$ ne contenant pas la surface.

Remarquons que si p et $n + 1$ ne sont pas premiers entre eux, $k = 0$ et la variété A_0 n'existe pas.

5. Considérons maintenant la variété Ω_3 intersection de Ω_{2n} avec

un espace linéaire à $2(r - n) + 4$ dimensions, intersection de $2n - 3$ hyperplans.

Les sections hyperplanes de Ω_3 sont des surfaces Ω_2 et par conséquent les variétés $\overline{W} + W_{2r}^{\alpha}$ qui ne contiennent pas Ω_3 découpent sur cette variété les adjointes aux sections hyperplanes. Il en résulte que, si l'on désigne par ξ les hyperplans de S_{2r+1}, le système canonique d'une variéîé Ω_3 est découpé par les hypersurfaces $\overline{W} + W_{2r}^{\alpha} - \xi$ qui ne contiennent pas Ω_3.

De même, les variétés canoniques d'une variété Ω_4 sont découpées par les hypersurfaces $\overline{W} + W_{2r}^{\alpha} - 2\xi$ ne contenant pas Ω_4 et plus généralement, les variétés canoniques des variétés Ω_i sonî découpées par les hypersurfaces $\overline{W} + W_{2r}^{\alpha} - (i - 2)\xi$ ne contenant pas la variété.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, une variété Ω_i, pour $i \leqslant n$, est en général dépourvue de points de diramation.

Supposons $i = n + 1$ et considérons la variété Ω_{n+1} section de Ω_{2n} par un espace linéaire à $2r - n + 2$ dimensions. Comme on l'a vu, la variété Ω_{2n} coupe θ_n et θ'_n suivant des variétés M, M' à $n - 1$ dimensions, multiples d'ordre p^n et d'ordre mp^n. Par conséquent, la variété Ω_{n+1} contiendra $2mp^n$ points de diramation, multiple d'ordre p^n.

La variété qui correspond à Ω_{n+1} dans S_{2n+1} est l'intersection de l'hypersurface V_{2n}^{mp} et de $n - 1$ hypersurfaces V_{2n}^{p}. Cette variété rencontre chacun des espaces S_n, S'_n suivant des groupes de points unis pour l'involution engendrée par H sur l'hypersurface. Dans S_n (ou S'_n), nous avons un groupe de mp^n points qui correspondent aux points de diramation situés sur θ_n (ou sur θ'_n). Ces points sont multiples d'ordre p^n pour les variétés canoniques de Ω_{n+1}, c'est-à-dire pour les hypersurfaces $W_{2n}^{\alpha} - (n - 1)\xi$. Il en résulte que si k n'est pas nul, les adjointes à Ω_{n+1} ont des points multiples d'ordre kp^{n-1} aux points de diramation et des points multiples d'ordre p^n si $k = 0$.

On obtiendra des résultats analogues pour les variétés Ω_{n+2}, Ω_{n+3}, ..., Ω_{2n}, les points de diramation étant remplacés par des courbes, des surfaces, ..., des variétés à $n - 1$ dimensions.

Les hypersurfaces adjointes à la variété Ω_{2n} passent kp^{n-1} *fois par les variétés multiples et* p^n *fois si* k *est nul.*

Liége, le 12 avril 1968.