Matematica. — *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Nota di Lucien Godeaux, presentata dal Corrispondente Francesco Severi.

Les involutions doublement infinies, appartenant à une surface algébrique, possèdent un nombre infini ou un nombre fini de points unis. Les involutions jouissant de cette dernière propriété ont été l'objet, ces derniers temps, de plusieurs travaux.

MM. Enriques et Severi d'une part (1), MM. Bagnera et De Franchis d'autre part (2), ont étudié les involutions appartenant à une surface de Jacobi ou de Picard; ensuite, M. Enriques a étudié les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un (3); enfin, j'ai considéré les involutions de genres zéro et de bigenre un existant sur une surface également de genres zéro et de bigenre un (4). Toutes ces involutions possèdent une propriété commune: elles sont engendrées par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même. J'ai observé récemment que cette propriété pouvait s'étendre aux involutions appartenant à une surface algébrique quelconque, pourvu qu'elles ne possèdent qu'un nombre fini de points unis. C'est ce résultat que je me propose d'exposer ici. D'une manière plus précise, j'établirai que:

Si une involution, appartenant à une surface algébrique, ne possède qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points unis, cette involution est

(1) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques.* Acta Mathematica (1909), vol. XXXII, pag. 283; vol. XXXIII, pag. 321 (Prix Bordin, 1907).

(2) *Le superficie algebriche le quali ammettono...* Memorie della Società dei XL (1908), ser. 3ª, vol. XV, pag. 251.

(3) *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno.* Rend. R. Accad. di Bologna, 1909-1910, pag. 71. Le théorème établi par M. Enriques dans cette Note m'a permis de classer toutes les involutions de genres un appartenant à une surface de genres un. L'ordre de ces involutions ne peut être que 2, 3, 4, 6, 8 ou 12. Un Mémoire sur ce sujet paraîtra prochainement dans les Annales de l'École Normale Supérieure.

(4) *Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$* [Bull. de la Soc. Math. de France (1913), tom. XLI, pag. 178]; *Détermination des correspondances rationnelles existant entre deux surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$* [Bulletin de l'Acad. Romaine (1913), tom. II, pag. 651.

engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même.

En d'autres termes, je démontrerai que les points d'un groupe de l'involution dépendent rationnellement de l'un d'entre eux.

Si nous examinons les démonstrations du théorème de MM. Enriques et Severi, de celui de M. Enriques et du mien, nous voyons qu'elles procèdent toutes suivant les mêmes lignes générales. Je procéderai ici de la même manière.

Etant donnée, sur une surface algébrique, une involution (doublement infinie) I_n, d'ordre $n\,(>2)$, douée d'un nombre fini de points unis, nous considérons, sur cette surface, un système continu complet $\{C\}$. Désignons par K les courbes transformées des courbes C au moyen de la correspondance $(n-1\,,n-1)$ déterminée par I_n entre les points de la surface.

Nous supposons, en premier lieu, que les courbes K sont irréductibles; et nous démontrons que ces courbes K sont comprises dans un système complet dont la dimension surpasse celle de $\{C\}$. Il suffit alors d'utiliser une extension du raisonnement fait par MM. Enriques et Severi dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (¹) pour être conduit à une absurdité.

Le même procédé permet de démontrer que les courbes K sont précisément réductibles en $n-1$ courbes. Le théorème que nous avons en vue, s'établit dès lors sans difficulté.

1. Soit F une surface algébrique sur laquelle il existe une involution I_n, d'ordre $n\,(>2)$, doublement infinie, n'ayant qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points unis.

Considérons, sur la surface F, un système continu complet, $\{C\}$, irréductible, satisfaisant aux conditions suivantes:

a) Les points unis de I_n ne sont pas des points-base de $\{C\}$.

b) Le système $\{C\}$ n'est composé ni avec I_n, ni avec une involution avec laquelle I_n serait elle-même composée.

c) La dimension de chacun des systèmes linéaires $|C|$ contenus dans $\{C\}$ est au moins égale à un.

Il existe évidemment une infinité de systèmes de courbes satisfaisant à ces trois conditions. Il suffit, par exemple, de prendre un système simple, sans points-base, de dimension suffisamment grande.

En général, un groupe de I_n ayant un de ses points sur une courbe C générique, n'a pas un second point sur cette courbe. Il ne pourra y avoir exception que pour un nombre fini, α, de groupes de I_n; ceux-ci auront deux de leurs points sur une courbe C générique.

La correspondance symétrique $(n-1\,,n-1)$, définie par I_n entre les points de F, transforme une courbe C en une courbe K. Chaque groupe de

(¹) Loc. cit., (1), première partie, à partir du 6ième alinéa de la pag. 334.

I_n, dont un point se trouve sur C, a $n-1$ autres points sur K. Ces groupes de $n-1$ points forment une γ'_{n-1}.

À un couple de points de C appartenant à un même groupe de I_n, correspondront $n-2$ points doubles de K. Cette courbe K aura donc $(n-2)\alpha$ points doubles (variables).

Lorsque C décrit le système $\{C\}$, K décrit un système continu ayant un certain nombre de points-base (aux points fondamentaux de I_n et aux conjugués, par rapport à I_n, des points-base éventuels de $\{C\}$) et $(n-2)\alpha$ points doubles variables.

2. Supposons les courbes K irréductibles. Sous cette hypothèse, nous allons démontrer que les courbes K sont les courbes totales d'un système continu complet, plus ample que $\{C\}$.

Considérons un système linéaire complet $|C|$ de $\{C\}$. Les courbes K, homologues des courbes de $|C|$, forment un système rationnel non linéaire, puisque $n>2$, et dont la dimension, égale à celle de $|C|$, est au moins égale à un d'après l'hypothèse *c*). D'après un théorème de M. Enriques [1], ces courbes K appartiennent totalement à un système linéaire $|K|$, dont la dimension surpasse nécessairement celle de $|C|$. Observons, de plus, que la courbe générique du système $|K|$ n'a pas de points doubles variables [2], mais que $|K|$ possède les mêmes points-base (avec les mêmes multiplicités) que le système rationnel formé par les courbes K homologues des courbes de $|C|$.

Lorsque $|C|$ décrit le système continu $\{C\}$, le système $|K|$ décrit un système continu $\{K\}$ (que nous supposerons complété, s'il le faut) qui contient, comme courbe totale, toute courbe K homologue d'une courbe C et dont la dimension surpasse celle de $\{C\}$.

Si les courbes K *sont irréductibles, elles sont les courbes totales d'un système continu complet* $\{K\}$ *dont la dimension surpasse celle de* $\{C\}$ *et dont la courbe générique n'a pas de points doubles variables.*

3. Nous montrerons actuellement que les deux propriétés:

A) $\{K\}$ *irréductible et* (par suite) *de dimension supérieure à celle de* $\{C\}$,

B) $\{C\}$ *n'ayant pas de points-base qui soient des points unis de* I_n *et* (par suite) *une courbe* C *ne contenant pas, en général, des points unis de* I_n,

sont incompatibles. On en déduira que les courbes K sont réductibles.

[1] *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche.* Rendiconti di Palermo (1896), vol. X, pag. 30.

[2] Voir Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (n. 5). Memorie della Società dei XL (1896), ser. 3ª, vol. X, pag. 1.

Pour démontrer cette incompatibilité, nous utiliserons le raisonnement fait par MM. Enriques et Severi dans leur *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (¹), en l'étendant un peu.

Considérons une courbe $\overline{K}$ de $\{K\}$ qui ne soit pas la conjuguée d'une courbe de $\{C\}$, ce qui est possible en vertu de la propriété A). Soit L la courbe engendrée par les $n-1$ points des groupes de I_n dont le $n^{\text{ième}}$ point se trouve sur $\overline{K}$. Lorsque la courbe $\overline{K}$ varie d'une façon continue dans le système $\{K\}$ de manière à se réduire à une courbe K_1 conjuguée d'une courbe C_1 de $\{C\}$, la courbe L se réduit à la courbe composée $(n-2)K_1+C_1$. Observons que lorsque la courbe $\overline{K}$ se sera réduite à K_1, elle aura en général acquis certains points doubles: c'est-à-dire que la connexion de la surface de Riemann $\overline{K}$ s'abaisse en se réduisant à K_1.

Supposons la courbe L irréductible, et indiquons par $x_1, x_2, \dots, x_n$, les n points d'un groupe variable de I_n. Pour fixer les idées, supposons que x_2 soit le point situé sur $\overline{K}$, $x_1, x_3, \dots, x_n$, étant les $n-1$ points situés sur L.

Puisque la courbe L est irréductible, on peut faire décrire à x_2, sur la courbe $\overline{K}$ (envisagée comme surface de Riemann), un cycle $\overline{\sigma}$ tel que, sur L, x_1 et x_3 soient échangés entre eux. Lorsque $\overline{K}$ se réduit à K_1, un des points $x_1, x_3, \dots x_n$, par exemple x_1, se trouve sur C_1, les $n-2$ autres étant sur K_1. Mais cette réduction s'opérant d'une manière continue, la propriété de x_1, x_3 d'être échangés lorsque x_2 décrit un certain cycle sur $\overline{K}$, doit être conservée. Deux cas peuvent se présenter:

1) Le cycle $\overline{\sigma}$, décrit sur $\overline{K}$, devient, sur K_1, un cycle σ non homologue à zéro. Lorsque x_2 décrit σ, x_1, qui se trouve sur C_1, et x_3, qui se trouve sur K_1, doivent s'échanger. Cela ne peut se produire que si C_1 possède des points unis de I_n (²): ce qui n'a pas lieu en général, en vertu de la propriété B).

2) Le cycle $\overline{\sigma}$, décrit sur $\overline{K}$, se réduit, sur K_1, à un point P. Ce point P est nécessairement un des points doubles que $\overline{K}$ acquiert lorsque cette courbe se réduit à K_1, c'est-à-dire, d'après la construction du système $\{K$ un des points doubles variables des courbes K homologues des courbes C. Le groupe de I_n comprenant P, possédera donc deux points P_1, P_2, communs aux courbes C_1, K_1. Or, si nous faisons décrire à x_2 sur la courbe K_1 (envisagée comme surface de Riemann) un cycle infiniment petit σ autour de P, x_1, qui se trouve sur C_1, et x_3, qui se trouve sur K_1, devront s'échanger. Cette échange ne pourra se faire qu'en l'un des points P_1 ou P_2. Par conséquent, l'un de ces points sera un point uni de l'involution I_n. La courbe C_1 contiendrait donc une point uni de I_n, ce qui n'a pas lieu en général [propriété B)].

(¹) Loc. cit. (5).

(²) Loc. cit. (1), première partie, pag. 335.

Nous voyons donc que les propriétés A) et B) sont contradictoires si L est supposée irréductible. Il faut donc que L soit réductible de telle manière que l'on ne puisse pas faire décrire à x_2, sur $\overline{K}$, un cycle tel que x_1 et x_8 soient échangés. Il faut donc que L contienne une partie X, lieu de x_1 se réduisant à C_1 lorque $\overline{K}$ se réduit à K_1. Et cela est encore vrai même si l'involution I_n possède des points fondamentaux unis [1].

La courbe X varie sur F d'une manière continue, et doit se réduire à une courbe de $\{C\}$. Mais ce système continu $\{C\}$ est complet: donc X appartient à ce système. La courbe X étant une courbe C, la courbe $L - X + \overline{K}$ doit être une courbe totale de $\{K\}$. Cela est absurde, car X n'étant qu'une partie de L, $\overline{K}$ serait à la fois courbe partielle et courbe totale de $\{K\}$. Cette absurdité prouve que les propriétés A) B) sont incompatibles, que L soit réductible ou non. Les courbes K ne peuvent donc être irréductibles.

Les courbes K *sont réductibles.*

4. Supposons que les courbes K soient réductibles, mais en un nombre de courbes inférieur à $n-1$. Alors. une de ces composantes, K′, sera le lieu de plusieurs points appartenant à un même groupe. variable, de I_n.

Dans ces conditions, on démontrera, en suivant le raisonnement fait plus haut, que le système $\{K'\}$, complet. comprenant les courbes K′ comme courbes totales, a la dimension supérieure à celle de $\{C\}$. Le raisonnement de MM. Enriques et Severi. répété comme ci-dessus, conduira alors à une absurdité. Par conséquent:

Les courbes K *se décomposent en* $n-1$ *courbes.*

5. Considérons un système linéaire $|C_1|$, triplement infini, contenu dans un système continu complet $\{C_1\}$ satisfaisant aux mêmes conditions que le système $\{C\}$ dont il a été question ci-dessus. Les courbes qui correspondent aux courbes C_1 au moyen de la correspondance $(n-1, n-1)$ déterminée sur F par I_n, se décomposent donc en $n-1$ parties que nous désignerons par $C_2, C_3, \ldots, C_n$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les points d'un groupe générique de I_n qui ne sont ni l'un ni l'autre des points-base de $|C_1|$. Considérons les courbes de $|C_1|$ passant par le point x_1. Elles forment un réseau que nous indiquerons par Σ_1. Les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_n$, conjuguées des courbes C_1 de Σ, passent respectivement par les points $x_2, x_3, \ldots, x_n$ et engendrent des systèmes doublement infinis que nous désignerons par $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$.

Deux des systèmes $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ ne peuvent coïncider. En effet, cela ne pourrait se présenter que dans deux cas:

1) Σ_1 coïncide avec l'un des autres Σ, par exemple avec Σ_2.

[1] Loc. cit. (1), première partie, pag. 336.

2) Deux systèmes Σ différents de Σ_1, par exemple Σ_2 et Σ_3, coïncident.

Dans le premier cas, les courbes de Σ_1 passeraient par le point x_2, ce qui est impossible par construction.

Dans le deuxième cas, les courbes C_2 de Σ_2 passeraient par x_3, et celles C_3 de Σ_3 par x_2. Cela ne peut arriver pour un point x_1 générique, car alors, lorsque x_1 décrirait une courbe C_1, les courbes C_2, C_3 correspondantes coïncideraient, et, contrairement à ce qui a été démontré plus haut, les courbes transformées des C_1 au moyen de I_n ne se décomposeraient pas en $n-1$ courbes.

Nous avons donc n systèmes doublement infinis *distincts* : $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$.

Considérons un groupe générique de I_n, et soit y_1 un point quelconque de ce groupe. Indiquons par H_1 le faisceau des courbes C_1 passant par y_1.

Les courbes de Σ_2, homologues des courbes C_1 de H_1, passent par un certain point du groupe de I_n considéré. Nous indiquerons par y_2 ce point et par H_2 le système ∞^1 formé par les courbes C_2 homologues des courbes C_1 de H_1. De la même manière, nous désignerons par $y_3, y_4, \dots, y_n$; $H_3, H_4, \dots, H_n$ les autres points et les autres systèmes ∞^1 homologues respectivement de y_1 dans le groupe de I_n considéré, et de H_1 dans les systèmes $\Sigma_3, \Sigma_4, \dots, \Sigma_n$.

Faisons décrire au point y_1, sur la variété réelle V à quatre dimensions qui représente la surface F dans le sens de Riemann, un cycle quelconque. Les systèmes $H_1, H_2, \dots, H_n$ varieront respectivement dans les systèmes *distincts* $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, et, par suite, ne coïncideront jamais. Donc, après un chemin quelconque décrit par y_1 sur V, les systèmes $H_1, H_2, \dots, H_n$ ne subissent aucun changement. Par suite, les points $y_2, y_3, \dots, y_n$ dépendent rationnellement de y_1. Notre théorème est ainsi complétement démontré.