Un groupe de transformations birationnelles de l'espace

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de transformatins birationnelles ayant même surface de points unis.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE

Un groupe de transformations birationnelles de l'espace

par LUCIEN GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Construction de transformatins birationnelles ayant même surface de points unis.

Nous nous proposons dans cette courte note d'indiquer la formation d'un groupe de transformations birationnelles que l'on obtient d'une manière fort simple. Les couples de points conjugués par rapport à trois quadriques définissent une transformation birationnelle involutive de l'espace. Si l'on considère quatre quadriques, on obtient ainsi quatre transformations birationnelles involutives. En faisant les produits deux à deux de ces transformations, on obtient des transformations birationnelles ayant pour lieu de points unis la jacobienne des quatre quadriques.

Une question analogue pourrait être traitée dans le plan et dans un hyperespace.

1. Considérons quatre quadriques linéairement indépendantes Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 n'ayant aucun point commun.

Si nous considérons les couples de points P, P' conjugués à la fois par rapport aux trois quadriques Q_2, Q_3, Q_4, nous définissons une transformation birationnelle involutive T_1. On sait que T_1 fait correspondre aux plans de l'espace des surfaces cubiques F_1 passant par une courbe Γ_1 du sixième ordre et de genre trois. Aux droites, T_1 fait correspondre des cubiques gauches K_1

s'appuyant en huit points sur la courbe Γ_1. La surface fondamentale de T_1 est une surface du huitième ordre passant trois fois par la courbe Γ_1, lieu des trisécantes de cette courbe.

En considérant successivement les groupes de trois quadriques $Q_3Q_4Q_1$, $Q_4Q_1Q_2$, $Q_1Q_2Q_3$, nous définissons de même trois transformations birationnelles involutives T_2, T_3, T_4 et trois courbes d'ordre six et de genre trois Γ_2, Γ_3, Γ_4.

La jacobienne J des quatre quadriques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 est le lieu des couples de points conjugués à la fois par rapport aux quatre quadriques. La surface J est du quatrième ordre et passe par les courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4.

Analytiquement, si

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \; f_2 = 0, \; f_3 = 0, \; f_4 = 0$$

sont les équations des quadriques Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, la jacobienne J a pour équation

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right| = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

et la courbe Γ_2 est représentée par la matrice obtenue en supprimant la i-ième ligne du déterminant précédent.

Observons que les courbes Γ_1, Γ_2 ont en commun les points qui annulent la matrice

$$\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right\| = 0, \quad (i = 3, 4, \; k = 1, 2, 3, 4)$$

c'est-à-dire quatre points.

Les quatre courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 se rencontrent deux à deux en quatre points et deux de ces courbes ne peuvent appartenir à une même surface cubique.

Les surfaces cubiques passant par la courbe Γ_1 sont ∞^3 et découpent sur la surface J des courbes Γ' du sixième ordre et de genre trois puisque la surface J, du quatrième ordre, possède une courbe canonique d'ordre zéro. Les courbes Γ' rencontrent chacune des courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 en quatorze points. Les surfaces cubiques passant par une courbe Γ' sont ∞^3 et découpent sur chacune des courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 une série d'ordre quatre qui ne peut être que la série canonique. Il en résulte que les courbes Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 appartiennent à un même système linéaire.

2. Ces points rappelés, considérons la transformation birationnelle $T_{12} = T_1 T_2$.

A un plan, T_1 fait correspondre une surface F_1 du troisième ordre passant par Γ_1. A la surface F_1, T_2 fait correspondre une surface F_{12} du neuvième ordre.

Les surfaces F_{12} passent par la courbe que T_2 fait correspondre à T_1, qui s'appuie en quatre points sur Γ_2. La transformée de Γ_1 est une courbe Γ_{12} d'ordre 14 à laquelle il faut joindre les quatre trisécantes de Γ_2 qui correspondent aux quatre points d'appui de Γ_1 sur Γ_2.

D'autre part, la courbe Γ_2 est triple pour les surfaces F_{12}.

A une droite, T_1 fait correspondre une cubique gauche K_1 s'appuyant en huit points sur la courbe Γ_1 et à K_1, T_2 fait correspondre une courbe du neuvième ordre K_{12} s'appuyant en huit points sur Γ_{12} et en 24 points sur Γ_2.

On vérifie aisément que le système $|F_{12}|$ est homaloïdal.

La courbe Γ_{12} s'appuie en 12 points sur Γ_2.

Deux points P, P' conjugués par rapport aux quatre quadriques appartiennent à la jacobienne J et T_{12} fait donc correspondre à P le point P lui-même. La jacobienne J est donc lieu de points unis pour la transformation T_{12}.

3. Considérons maintenant la transformation $T_{21} = T_2 T_1$.

Désignons par Γ_{21} la courbe d'ordre 14 que T_1 fait correspondre à Γ_2.

Aux plans, T_{21} fait correspondre des surfaces du neuvième ordre F_{21} passant trois fois par Γ_1, une fois par Γ_{21} et par quatre trisécantes de Γ_1. Il en résulte que les transformations T_{12} et T_{21} sont distinctes.

D'autre part, on voit aisément que les transformations T_{12}, T_{21} ne peuvent être périodiques.

Les produits deux à deux des transformations T_1, T_2, T_3, T_4 *donnent douze transformations birationnelles non périodiques pour lesquelles les points de la jacobienne* J *sont unis.*

Liège, le 8 juillet 1965.