Bulletin de la Classe des sciences

Construction d'une surface algébrique à sections hyperplanes bicanoniques possédant une seule courbe canonique

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Construction de surfaces contenant une involution du second ordre privée de points unis dont l'image est une surface de genres pa = Pg = o

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Construction d'une surface algébrique à sections hyperplanes bicanoniques possédant une seule courbe canonique. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 52, 1966. pp. 1058-1063;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1966.62704;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1966_num_52_1_62704;

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction d'une surface algébrique à sections hyperplanes bicanoniques possédant une seule courbe canonique

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface possédant une seule courbe canonique et contenant une involution du second ordre, privée de points unis, dont l'image est une surface non rationnelle de genres $p_a = p_g = 0$. Les sections hyperplanes de cette surface forment son système bicanonique.

Dans un travail récent (1), nous avons étudié les surfaces non rationnelles de genres $p_a = p_g = 0$ dont le système bicanonique est irréductible. Précisément, nous avons montré qu'une telle surface Φ, de bigenre $P_2 = \pi > 2$, contient une courbe isolée Γ de genre π et de degré virtuel $\pi - 1$, son système bicanonique étant $|2\Gamma|$ bien que la courbe Γ ne soit pas une courbe canonique. L'adjoint $|\Gamma'|$ à Γ est distinct du système $|2\Gamma|$. Nous avons démontré de plus que Φ est l'image d'une involution privée de points unis, du second ordre, appartenant à une surface F possédant une seule courbe canonique dont l'image sur Φ est la courbe Γ.

Dans cette note, nous exposons une nouvelle démonstration de cette dernière propriété dans l'hypothèse où l'on a $\pi \geqslant 5$ et

(1) *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41).

où le système bicanonique de Φ est simple. Cette nouvelle démonstration a l'avantage de donner une construction de la surface F.

Nous considérons, dans un espace linéaire $S_{2\pi-1}$ à $2\pi - 1$ dimensions, deux espaces linéaires σ_1, σ_2 à $\pi - 1$ dimensions ne se rencontrant pas. Dans σ_1, nous considérons une transformée birationnelle Φ_1 de Φ dont les sections hyperplanes sont les courbes 2Γ et dans σ_2, une transformée birationnelle Φ_2 de Φ dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ'. Les surfaces Φ_1 et Φ_2 sont liées par une transformation birationnelle et la surface F est l'intersection partielle de la variété des droites joignant les points homologues de Φ_1, Φ_2 et d'une hyperquadrique de $S_{2\pi-1}$.

1. Soit Φ une surface de genres $p_a = p_g = 0, p^{(1)} = P_2 = \pi > 3$, dont le système bicanonique soit irréductible et simple.

Nous avons démontré que la surface Φ contient une courbe isolée Γ de genre π et de degré virtuel $\pi - 1$, dont le double est une courbe bicanonique sans qu'elle-même soit une courbe canonique. Les systèmes

$$|\Gamma_2| = |2\Gamma| \ , \ |\overline{\Gamma}_2| = |\Gamma'|$$

sont distincts, le premier étant le système bicanonique par hypothèse irréductible et simple. Ces systèmes ont tous deux le genre $3\pi - 2$, le degré $4(\pi - 1)$ et la dimension $\pi - 1$. On a

$$2\Gamma_2 \equiv 2\overline{\Gamma}_2,$$

c'est-à-dire

$$2\Gamma' \equiv 4\Gamma.$$

Considérons d'autre part dans un espace linéaire $S_{2\pi-1}$ à $2\pi - 1$ dimensions, deux espaces linéaires σ_1, σ_2 à $\pi - 1$ dimensions, ne se rencontrant pas.

Rapportons projectivement les courbes Γ_2 de Φ aux hyperplans de σ_1 ; nous obtenons une surface Φ_1 d'ordre $4\pi - 4$ birationnellement identique à Φ et nous désignerons par Γ_2', et $\overline{\Gamma}_2'$ les courbes qui correspondent aux courbes Γ_2 $\overline{\Gamma}_2$ de Φ et par Γ_1 la courbe d'ordre $2\pi - 2$ et de genre π qui correspond à Γ.

D'autre part, rapportons projectivement aux hyperplans de σ_2 les courbes $\overline{\Gamma}_2$ de Φ. Soit Φ_2 la surface obtenue. Nous désignerons par $\overline{\Gamma}_2$ et Γ'_2 les courbes qui correspondent aux courbes $\overline{\Gamma}_2$, Γ_2 de Φ et par Γ'_1 la courbe d'ordre $2\pi - 2$ qui correspond à la courbe Γ.

Les surfaces Φ_1 et Φ_2 sont birationnellement identiques, nous désignerons par T la transformation liant ces deux surfaces Nous allons considérer la variété lieu des droites joignant les points homologues de ces deux surfaces.

2. Considérons en premier lieu la surface lieu des droites s'appuyant en des points homologues sur une courbe Γ_2 de Φ_1 et sur la courbe Γ'_2 de Φ_2 que T lui fait correspondre.

Un hyperplan passant par la courbe Γ_2 rencontre la courbe Γ'_2 en $4(\pi - 1)$ points et cet hyperplan contient donc $4(\pi - 1)$ droites de la surface considérée. De plus, il contient la courbe Γ_2 certainement simple pour la surface. Celle-ci est donc d'ordre $8(\pi - 1)$. Nous la désignerons par $V_2^{8(\pi-1)}$. Observons qu'elle est située dans un hyperplan passant par σ_2.

De même, la surface réglée $\overline{V}_2^{8(\pi-1)}$ lieu des droites s'appuyant en des points homologues sur une courbe $\overline{\Gamma}_2$ de Φ_2 et sur la courbe $\overline{\Gamma}'_2$ de Φ_1 que T lui fait correspondre est d'ordre $8(\pi - 1)$; elle est située dans un hyperplan passant par σ_1.

Désignons par V_3 le lieu des droites s'appuyant en des points homologues sur les surfaces Φ_1 et Φ_2.

Un hyperplan passant par σ_1 coupe l'espace σ_2 suivant un espace à $\pi - 2$ dimensions qui contient une courbe $\overline{\Gamma}_2$. Cet hyperplan contient donc la surface $\overline{V}_2^{8(\pi-1)}$ relative à cette courbe $\overline{\Gamma}_2$. Comme la variété V_3 passe simplement par la surface Φ_1, elle est d'ordre $12(\pi - 1)$. Nous la désignerons par $V_3^{12(\pi-1)}$.

3. Les droites d'appuyant en des points homologues sur les courbes Γ_1 et Γ'_1 forment une réglée V_2 d'ordre $4(\pi - 1)$, comme on le voit par un raisonnement analogue aux précédents.

Comme on a

$$2\Gamma_1 \equiv \Gamma_2 \ , \ 2\Gamma'_1 \equiv \Gamma'_2,$$

on a

$$2V_2 \equiv V_2^{8(\pi-1)} \tag{1}$$

Par contre, les surfaces $\overline{V}_2^{8(\pi-1)}$ découpent sur la réglée V_2 des groupes de $2(\pi-1)$ droites formant des groupes canoniques de la réglée V_2.

4. Aux courbes du système $|2\Gamma_2| = |2\overline{\Gamma}'_2|$ de Φ_1, T fait correspondre les courbes du système $|2\Gamma_2| = |2\Gamma'|$ de Φ_2. Considérons une courbe $(2\Gamma_2)$ de $|2\Gamma_2|$ découpée sur Φ_1 par une hyperquadrique $\varphi = 0$ de σ_1 et supposons qu'il soit possible de la choisir de telle sorte que la courbe $(2\Gamma')$ qui lui correspond sur Φ_2 soit découpée sur cette surface par une hyperquadrique $\psi = 0$ de σ_2.

Dans l'espace $S_{2\pi-1}$, l'hyperquadrique Q d'équation

$$\varphi + \psi = 0$$

contient les droites joignant les points homologues des deux courbes envisagées. Ces droites engendrent une surface d'ordre $16(\pi-1)$ tracée sur la variété $V_3^{12(\pi-1)}$.

L'hyperquadrique Q coupe la variété $V_3^{12(\pi-1)}$ suivant une surface comprenant la surface d'ordre $16(\pi-1)$ dont il vient d'être question, complétée par une surface F d'ordre $8(\pi-1)$.

Les droites de $V_3^{12(\pi-1)}$ coupent la surface F en des couples de points formant une involution I du second ordre ayant comme images les surfaces Φ_1 et Φ_2 et par suite la surface Φ.

Désignons par H l'homographie biaxiale harmonique de $S_{2\pi-1}$ ayant pour axes ponctuels σ_1 et σ_2. Cette homographie engendre sur F l'involution I. Par conséquent si l'involution I possède des points unis, ils appartiennent nécessairement soit à σ_1, soit à σ_2.

Soit P un point uni de I appartenant à l'espace σ_1, s'il en existe. C'est un point de diramation pour la correspondance (1,2) existant entre Φ_1 et F. Mais alors, le point P' que T fait correspondre à P sur Φ_2 est un point de diramation pour la correspondance (1,2) entre Φ_2 et F. Et c'est par suite un point uni de l'involution I. Mais alors, au point de diramation P de Φ_1 correspondraient deux points unis de I, ce qui est absurde puisque I est du second ordre. On en conclut que l'involution I est dépourvue de points unis.

Cela étant, entre le genre arithmétique p_a de F et celui $p'_a = 0$ Φ_1, on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p_a = 1$. La surface F a le genre arithmétique un.

5. Pour voir dans quelles conditions les raisonnements précédents sont applicables, il faut montrer que le système de dimension minimum soutenant les courbes formées de deux courbes Γ'_2 sur Φ_2 contient des courbes situées sur une hyperquadrique de σ_2. Cela a évidemment lieu si la surface Φ_2 appartient à une hyperquadrique de σ_2. Écartons ce cas où le raisonnement précédent est valable.

Les courbes Γ'_2 découpent sur une courbe $(2\Gamma'_2)$ irréductible du système $|2\Gamma'_2|$ des groupes g de $8(\pi - 1)$ points formant une série linéaire de dimension $\pi - 1$. D'après un théorème classique de Castelnuovo, la série linéaire de dimension minimum contenant tous les groupes formés de deux groupes g a une dimension au moins égale à $3\pi - 4$. Soit G un groupe de cette série qui ne soit pas composé de deux groupes g. Il appartient à une série linéaire simplement infinie contenant deux groupes formés de deux groupes g, l'un par deux groupes g_1, g'_1, l'autre par deux groupes g_2, g'_2.

Les groupes g_1, g'_1 sont découpés sur $(2\Gamma'_2)$ par deux courbes Γ'_2 et de même, les groupes g_2, g'_2 par deux autres courbes Γ'_2. Ces deux couples de courbes Γ'_2 déterminent un faisceau linéaire de $|2\Gamma'_2|$ et les courbes de ce faisceau découpent sur $(2\Gamma'_2)$ précisément la série à laquelle appartient le groupe G. Celui-ci se trouve donc sur une courbe du système de dimension minimum contenant tous les couples de courbes Γ'_2. Ce système a donc également comme dimension minimum $3\pi - 4$. Nous le désignerons par $|A|$.

Cela étant, considérons le système tétracanonique $|2\Gamma'_2|$ de Φ_2, dont la dimension est $P_4 - 1 = 6(\pi - 1)$ et le système de dimension $\frac{1}{2}(\pi - 1)(\pi - 2)$ découpé par les hyperquadriques de σ_2. Le dernier de ces systèmes et le système $|A|$ ont en commun un système de dimension

$$r \geqslant \frac{1}{2}(\pi^2 - 5\pi - 2).$$

Pour $\pi \geqslant 5$, on a $r > 0$, donc pour $\pi \geqslant 5$, il existe des hyperquadriques de σ_2 découpant sur Φ des courbes de $| A |$.

Ainsi pour $\pi \geqslant 5$, la surface F existe certainement.

6. Une surface $V_2^{8(\pi-1)}$ coupe l'hyperquadrique Q suivant $8(\pi - 1)$ droites s'appuyant sur les courbes $(2\Gamma_2)$, $(2\Gamma'_2)$ et par conséquent la surface F suivant une courbe C_2 d'ordre $8(\pi - 1)$. La courbe C_2 se trouve, comme la surface $V_2^{8(\pi-1)}$, dans un hyperplan passant par σ_2.

De même, une surface $\overline{V}_2^{8(\pi-1)}$ coupe F suivant une courbe $\overline{C}_2$ d'ordre $8(\pi - 1)$ située dans un hyperplan passant par σ_1.

Les courbes C_2, $\overline{C}_2$ forment des systèmes linéaires de sections hyperplanes de F, de degré $8(\pi - 1)$, de genre $6(\pi - 1) + 1$ et de dimension $\pi - 1$.

La surface V_2 coupe Q suivant $4(\pi - 1)$ droites s'appuyant sur les courbes $(2\Gamma_2)$ et $(2\Gamma'_2)$ et la surface F suivant une courbe C_1 d'ordre $4(\pi - 1)$. A cause de la relation fonctionnelle (1), il existe un hyperplan touchant la surface F le long de la courbe C_1

La courbe C_1 est de genre $2\pi - 1$. Elle est située dans un espace linéaire à $2\pi - 2$ dimensions, est d'ordre $4(\pi - 1)$ et par conséquent est une courbe projectivement canonique. D'ailleurs les courbes $\overline{C}_2$ découpent sur C_1 des groupes canoniques. Il en est de même des courbes C_2 et par conséquent les systèmes $|C_2|$, $|\overline{C}_2|$ coïncident en un seul système qui est celui des sections hyperplanes de F et est l'adjoint à la courbe C_1.

On a d'autre part $C_2 \equiv 2C$ et le système canonique $| C_2 - C_1 |$ se réduit à la seule courbe C_1. La surface F possède donc une seule courbe canonique et son système bicanonique coïncide avec celui des sections hyperplanes.

L'Aquila, septembre 1966.