# Construction de surfaces à sections hyperplanes tricanoniques possédant une seule courbe canonique

Lucien Godeaux

**Résumé**

Résumé. — Construction d'une surface possédant une seule courbe canonique et contenant une involution du second ordre, privée de points unis, dont l'image est une surface non rationnelle de genres Pa = P0 = o. Les sections hyperplanes de cette surface forment son système bicanonique.

## COMMUNICATIONS DES MEMBRES

### GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

# Construction de surfaces à sections hyperplanes tricanoniques possédant une seule courbe canonique

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

*Résumé.* — Construction de surfaces contenant une involution du second ordre privée de points unis dont l'image est une surface de genres $p_a = p_g = 0$.

Nous avons démontré qu'une surface $\Phi$ de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = \pi \geqslant 3$ dont le système canonique est irréductible, est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface F ayant une seule courbe canonique (1). Dans une note récente (2), nous avons donné une nouvelle démonstration de ce théorème applicable dans le cas $\pi > 4$ et donné également une construction de la surface F. Précisément, nous construisions un modèle bicanonique de cette dernière surface. Les mêmes procédés de démonstration sont applicables aux cas $\pi = 3$ ou 4, mais au lieu d'obtenir un modèle bicanonique de F, nous obtenons un modèle tricanonique, c'est-à-dire une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes tricanoniques.

(1) *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres géométrique et arithmétique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-41).

(2) *Construction d'une surface algébrique à sections hyperplanes bicanoniques possédant une seule courbe canonique* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1966, pp. 1058-1063).

1. Soit $\Phi$ une surface de genres $p_a = p_g = o$, $p^{(1)} = P_2 = 3$ dont le système bicanonique est irréductible. Nous avons démontré qu'elle possède une courbe isolée $\Gamma$, de genre trois et de degré virtuel deux, telle que $|2\Gamma|$ soit le système bicanonique sans que $\Gamma$ soit une courbe canonique. Les courbes $2\Gamma$ découpent sur la courbe $\Gamma$ une série paracanonique $g_4^1$ et l'adjoint $|\Gamma'|$ à $\Gamma$ est distinct de $|2\,\Gamma|$.

Les systèmes $|\Gamma_2| = |2\Gamma|$ et $|\overline{\Gamma}_2| = |\Gamma'|$ ont le même degré 8, le même genre 7 et la même dimension 2. Une courbe $\Gamma_2$ rencontre une courbe $\overline{\Gamma}_2$ en huit points et on a $2\,\Gamma_2 \equiv 2\,\overline{\Gamma}_2$, c'est-à-dire $2\,\Gamma' \equiv 4\,\Gamma$ (Le diviseur de Severi de $\Phi$ est $\sigma = 2$).

Le système tricanonique $|\Gamma_3| = |\Gamma + \Gamma'|$ et le système $|\overline{\Gamma}_3| = |3\,\Gamma|$ ont le même degré 18, le même genre 13 et la même dimension $P_3 - 1 = 6$.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que les systèmes $|\Gamma_3|$, $|\overline{\Gamma}_3|$ sont simples. En rapportant projectivement les courbes $\Gamma_3$ aux hyperplans d'un espace $S_6$ à six dimensions, on obtient une surface d'ordre 18 que nous continuerons à désigner par $\Phi$. En rapportant projectivement les courbes $\overline{\Gamma}_3$ aux hyperplans d'un espace $S_6$, on obtiendra une surface d'ordre 18 que nous désignerons par $\overline{\Phi}$.

2. Considérons la surface $\Phi$. Sur cette surface, la courbe $\Gamma$ est du sixième ordre et appartient à un espace $\sigma_3$ à trois dimensions. Nous supposerons que cette courbe n'est pas hyperelliptique et qu'elle est donc la base d'un système homaloïdal de surfaces cubiques.

Les hyperquadriques de $S_6$ sont en nombre $\infty^{27}$ et découpent sur $\Gamma$ une série $g_{12}^9$. Il y a donc $\infty^{17}$ de ces hyperquadriques qui contiennent $\Gamma$, c'est-à-dire $\sigma_3$ puisque $\Gamma$ n'appartient à aucune quadrique de cet espace. Ces hyperquadriques découpent sur $\Phi$ des courbes $2\,\Gamma' + \Gamma$ et sur $\Gamma$ une série $g_{10}^7$. Il y a donc $\infty^9$ hyperquadriques contenant deux fois $\Gamma$, c'est-à-dire deux fois l'espace $\sigma_3$. Ces cônes de sommet $\sigma_3$ sont en nombre $\infty^5$ donc il y a quatre hyperquadriques linéairement indépendantes contenant la surface $\Phi$.

Une courbe $\Gamma_2$ irréductible est une courbe projectivement canonique et elle appartient donc à $\infty^9$ hyperquadriques. Quatre de celle-ci contiennent $\Phi$ et les autres découpent sur $\Phi$ un système $\infty^5$ de courbes $2\Gamma + 2\Gamma' - 2\Gamma = 2\Gamma'$, c'est-à-dire un système $\infty^5$ de courbes tétracanoniques.

Le système tétracanonique contient également les courbes $2\Gamma'$ découpées par les $\infty^5$ cônes quadratiques de sommet $\sigma_3$. Les deux systèmes partiels de courbes tétracanoniques que l'on vient de rencontrer ne peuvent avoir une courbe commune. On a $P_4 - 1 = 12$ et les deux systèmes rencontrés appartiennent à un système linéaire de dimension 11, donc il y a $6 + 1 = 7$ courbes tétracanoniques linéairement indépendantes qui ne peuvent se trouver sur une hyperquadrique passant par une courbe $\Gamma_2$ irréductible.

Considérons le système $|\Gamma_6| = |2\Gamma' + 2\Gamma| = |6\Gamma|$. Il a la dimension $P_6 - 1 = 30$ et le système des hyperquadriques a la dimension 27 ; il y a donc des courbes $\Gamma_6$ n'appartenant pas à des hyperquadriques. On vient de voir que parmi les courbes $\Gamma_6$ contenant une courbe $\Gamma_2$ irréductible, il y en a $\infty^6$ n'appartenant pas à une hyperquadrique ; on en conclut que les hyperquadriques découpent sur $\Phi$, $\infty^{24}$ courbes $\Gamma_6$.

3. Considérons maintenant la surface $\overline{\Phi}$ d'ordre 18 de $S_5$, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\overline{\Gamma}_3 = 3\Gamma$. A la courbe $\Gamma$ correspond sur cette surface une courbe du sixième ordre que nous désignerons par $\overline{\Gamma}$ et qui appartient à un espace $\overline{\sigma}_3$ à trois dimensions. Le long de la courbe $\overline{\Gamma}$, il y a un hyperplan qui oscule la surface $\overline{\Phi}$.

Il existe des hyperquadriques qui ne contiennent pas la surface $\overline{\Phi}$ ; elles découpent sur celle-ci des courbes 6-canoniques $\overline{\Gamma}_6$.

4. Considérons maintenant un espace linéaire $S_{13}$ à 13 dimensions et dans cet espace deux espaces à six dimensions $\Sigma_6$, $\overline{\Sigma}_6$ ne se rencontrant pas. Dans $\Sigma_6$ nous considérons une surface $\Phi$ et dans $\overline{\Sigma}_6$ une surface $\overline{\Phi}$ birationnellement équivalente à $\Phi$. Nous allons considérer les réglées engendrées par les droites joignant des points homologues des surfaces $\Phi$ et $\overline{\Phi}$

En répétant les raisonnements faits dans notre note citée plus haut, on voit que :

Le lieu des droites joignant les points homologues de deux courbes $\Gamma_3$ situées l'une sur $\Phi$, l'autre sur $\bar{\Phi}$, est une surface $V_2^{36}$ d'ordre 36 située dans un hyperplan passant par $\bar{\Sigma}_6$.

De même, le lieu des droites joignant les points homologues de deux courbes $\bar{\Gamma}_3$ homologues se trouvant l'une sur $\Phi$, l'autre sur $\bar{\Phi}$, est une surface $\bar{V}_2^{36}$ d'ordre 36 située dans un hyperplan passant par $\Sigma_6$.

Le lieu des droites joignant les points homologues des deux surfaces $\Phi, \bar{\Phi}$ est une variété $V_3^{54}$ d'ordre 54.

5. Soit dans $\bar{\Sigma}_6$, $\bar{\varphi} = 0$ l'équation d'une hyperquadrique coupant $\bar{\Phi}$ suivant une courbe $\bar{\Gamma}_6$ et $\varphi = 0$ l'équation d'une hyperquadrique passant par $\Phi$ dans $\Sigma_6$. Les droites joignant les points homologues de la courbe $\bar{\Gamma}_6$ et de la courbe $\Gamma_6$ qui lui correspond sur $\Phi$ engendrent une surface $V_2^{72}$ d'ordre 72.

L'hyperquadrique de $S_{13}$ d'équation

$$\varphi_2 + \bar{\varphi}_2 = 0$$

coupe la variété $V_3^{54}$ suivant la surface $V_2^{72}$ et suivant une surface F d'ordre 36.

Les génératrices de $V_3^{54}$ déterminent sur F une involution I du second ordre dont $\Phi$ et $\bar{\Phi}$ sont des images.

L'homographie biaxiale harmonique H d'axes $\Sigma_6$, $\bar{\Sigma}_6$ transforme F en elle-même et détermine sur cette surface l'involution I. On en déduit, comme dans la note citée plus haut, que l'involution I est privée de points unis.

6. Entre le genre arithmétique $p'_a = 0$ de $\Phi$ et celui $p_a$ de F, on a la relation

$$p_a + 1 = 2(p'_a + 1),$$

d'où $p_a = 1$.

Les surfaces $V_2^{36}$ découpent sur F des courbes $C_3$ qui correspondent aux courbes $\Gamma_3$. Elles ont le degré 36 et d'après la formule de Zeuthen, le genre 25. Ces courbes sont situées dans des hyperplans passant par $\bar{\Sigma}_6$

Les surfaces $\bar{V}_2^{36}$ découpent sur F des courbes $\bar{C}_3$ de degré 36 et de genre 25, situées dans des hyperplans passant par $\Sigma_6$.

D'après le théorème de Riemann-Roch, les courbes $C_3$ appartiennent à un système linéaire de dimension $r \geqslant p_a + 36 - 25 + 1$ ou $r \geqslant 13$.

Les courbes $C_3$ déterminent sur une courbe $\overline{C}_3$ une série d'ordre 36. Observons que la série découpée par les courbes $\Gamma_3 = \Gamma + \Gamma'$ sur une courbe $\overline{\Gamma}_3$ a l'indice de spécialité un, car les adjointes aux courbes $\overline{\Gamma}_3$ sont les courbes $2\,\Gamma + \Gamma'$. Par conséquent, la série découpée par les courbes $C_3$ sur une courbe $\overline{C}_3$ a l'indice de spécialité un et la dimension $36 - 25 + 1 = 12$. Il en résulte qu'il y a une courbe $C_3$ qui coïncide avec la courbe $\overline{C}_3$, c'est-à-dire que les courbes $C_3$, $\overline{C}_3$ appartiennent à un même système linéaire qui est le système des sections hyperplanes de F.

7. La surface lieu des droites joignant des points homologues des courbes $\Gamma$ et $\overline{\Gamma}$ est d'ordre 12 et découpe sur F une courbe $C_1$ d'ordre 12 et de genre cinq, située dans l'espace $\sigma_7$ à sept dimensions déterminé par les espaces $\sigma_3$ et $\overline{\sigma}_3$.

Les droites s'appuyant en des points homologues sur deux courbes $\Gamma_2$ homologues appartenant aux surfaces $\Phi$ et $\overline{\Phi}$ engendrent une surface d'ordre 24 et découpent sur F une courbe $C_2$ d'ordre 24 et de genre 13. De même, les droites joignant les points homologues de deux courbes $\overline{\Gamma}_2$ homologues situées l'une sur $\Phi$ l'autre sur $\overline{\Phi}$ découpent sur F une courbe $\overline{C}_2$ d'ordre 24 et de genre 13.

Sur $\Phi$, les courbes $\Gamma_3 = \Gamma + \Gamma'$ découpent sur une courbe $\Gamma_2$ la série canonique, donc les courbes $C_3$ découpent sur une courbe $C_2$ la série canonique. Le système $|\,C_3\,|$ est donc l'adjoint à $|\,C_2\,|$ et on a $C_3 - C_2 \equiv C_1$. La surface F possède donc une seule courbe canonique $C_1$ et a les genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$.

On voit que les systèmes $|\,C_2\,|$ et $|\,\overline{C}_2\,|$ coïncident en un seul système découpé par les hyperplans passant par $\sigma_7$. Les systèmes $|\,C_2\,|$, $|\,C_3\,|$ sont respectivement les systèmes bicanonique et tricanonique de la surface F.

* * *

8. Passons au cas $\pi = 4$. La surface $\Phi$ contient une courbe $\Gamma$ de genre quatre et de degré virtuel 3. Le système bicanonique

$|\Gamma_2| = |2\Gamma|$ a le degré 12, le genre 10 et la dimension trois, de même que le système $|\overline{\Gamma}_2| = |\Gamma'|$. Le système tricanonique $|\Gamma_3| = |\Gamma + \Gamma'|$ et le système $|\overline{\Gamma}_3| = |3\Gamma|$ ont le degré 27, le genre 19 et la dimension $P_3 - 1 = 9$.

Considérons un modèle tricanonique de la surface $\Phi$ dans un espace linéaire $S_9$ à 9 dimensions. Le système 6-canonique a la dimension $P_6 - 1 = 45$ et le système des hyperquadriques a la dimension 54. Il en résulte qu'il y a au moins neuf hyperquadriques linéairement indépendantes contenant la surface $\Phi$.

Le raisonnement peut maintenant se poursuivre comme dans le cas précédent. Dans un espace $S_{19}$ à 19 dimensions, on considère deux espaces à 9 dimensions $\Sigma_9$, $\overline{\Sigma}_9$ ne se rencontrant pas. Dans $\Sigma_9$, on considère une surface $\Phi$ dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_3$ et dans $\overline{\Sigma}_9$ une surface $\overline{\Phi}$ dont les sections hyperplanes sont les courbes $\overline{\Gamma}_3$, ces deux surfaces étant birationnellement équivalentes.

Si $\varphi = 0$ est l'équation d'une hyperquadrique de $\Sigma_9$ contenant la surface $\Phi$ et $\overline{\varphi} = 0$ l'équation d'une hyperquadrique de $\overline{\Sigma}_9$ découpant sur $\Phi$ une courbe $\Gamma_6$, l'hyperquadrique $\varphi + \overline{\varphi} = 0$ coupe la variété des droites joignant les points homologues des surfaces $\Phi$, $\overline{\Phi}$ suivant une surface F d'ordre 54. On démontre que cette surface F a les genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 7$ et que ses sections hyperplanes forment son système tricanonique.

*Liège*, le 11 octobre 1966.