Bulletin de la Classe des sciences

Quadriques de Tzitzeica et congruences de Goursat

Lucien Godeaux

Résumé
Résumé. — Quadriques de Tzitzeica associées à une suite de Laplace et cas où certaines des droites joignant deux points consécutifs décrivent des congruences de Goursat.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Quadriques de Tzitzeica et congruences de Goursat

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. - Quadriques de Tzitzeica associées à une suite de Laplace et cas où certaines des droites joignant deux points consécutifs décrivent des congruences de Goursat.

On sait l'intérêt que présentent pour la théorie des suites de Laplace les coniques de Koenigs. Tzitzeica a introduit des quadriques qui jouent un rôle analogue (¹) de la manière suivante : Soient y^1, y, z, z^1 quatre points consécutifs d'une suite de Laplace, les variables étant u et v et chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Tout point de l'espace S_3 déterminé par ces quatre points a des coordonnées de la forme

$$\xi_1 y^1 + \xi_0 y + \eta_0 z + \eta_1 z^1$$

et les quadriques d'équation

$$\xi_1 \eta_1 + \lambda \xi_0 \eta_0 = 0$$

passent par les droites yy^1, zz^1, yz^1, zy^1. Les quadriques de Tzitzeica sont les quadriques de ce faisceau qui osculent la courbe u au point y^1 ou la courbe v au point z^1. Lorsque les deux quadriques

(¹) TZITZEICA, *Sur certaines congruences* (C. R., 1926, t. 182, pp. 952-954), *Sur une nouvelle classe de congruences* (C. R., 1926, t. 182, pp. 1071-1073), *Sur certaines congruences de droites* (Journal de Liouville, 1928, pp. 189-208). Voir aussi les *Œuvres de Tzitzeica* (Bucarest, 1941), pp. 399-427.

de Tzitzeica coïncident, la droite yz engendre une congruence de Goursat.

Considérons, dans un espace S_r à $r > 2$ dimensions, une suite de Laplace L illimitée dans les deux sens. Appelons, avec Demoulin, *ligne brisée de Laplace* L, l'ensemble des droites joignant deux points consécutifs de la suite L. Finikoff a démontré que si deux côtés consécutifs d'une ligne brisée de Laplace engendrent des congruences de Goursat, il en est de même de tous les côtés de la ligne [1]. Dans ce travail, nous généralisons le théorème de Finikoff.

Numérotons les côtés successifs d'une ligne brisée de Laplace. *Si les côtés de rang* m *et* m + n *décrivent des congruences de Goursat, il en est de même des côtés de rang* m + kn, k *étant un entier positif ou négatif.*

1. Soient, dans un espace S_r à $r > 2$ dimensions, deux points U, V dépendant de deux variables u, v, transformés de Laplace. l'un de l'autre. On écrira

$$U_u + 2bV = 0, \qquad V_v + 2aU = 0,$$

a et b étant des fonctions de u, v, différents de zéro.

Ces points déterminent une suite de Laplace L,

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots \tag{L}$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

On a

$$U^n = U^{n-1}_v - U^{n-1} (\log.\ bh_1 \ldots h_{n-1})_v, \quad U^n_u = h_n U^{n-1}, \tag{1}$$

où

$$h_n = -(\log.\ bh_1 \ldots h_{n-1})_{uv} + h_{n-1}, \quad h_0 = 4ab$$

et

$$V^n = V^{n-1}_u - V^{n-1} (\log.\ ak_1 \ldots k_{n-1})_u, \quad V^n_v = k_n V^{n-1},$$

où

$$k_n = -(\log.\ ak_1 \ldots k_{n-1})_{uv} + k_{n-1}, \quad k_0 = 4ab.$$

Un point de l'espace S_r peut être représenté par l'expression

$$\ldots \xi_n U^n + \ldots + \xi_1 U^1 + \xi_0 U + \eta_0 V + \eta_1 V^1 + \ldots + \eta_n V^n + \ldots$$

[1] S. Finikoff, *Sur les congruences de M. Goursat* (C. R., 1929, t. 188, pp. 1367-1368).

et nous dirons que les nombres ξ, η sont les coordonnées locales de ce point.

2. Considérons dans l'espace S_3 déterminé par les points U^1, U, V, V^1 les quadriques

$$\xi_0\eta_0 + \lambda\xi_1\eta_1 = 0.$$

Celle de ces quadriques qui oscule la ligne u au point U^1 a pour équation

$$\xi_0\eta_0 - 3h_1\xi_1\eta_1 = 0.$$

La seconde quadrique, qui oscule la ligne v au point V^1 a pour équation

$$\xi_0\eta_0 - 3k_1\xi_1\eta_1 = 0.$$

Pour que la congruence (UV) soit une congruence de Goursat, il faut et il suffit que ces deux quadriques coïncident, ce qui implique $h_1 = k_1$, c'est-à-dire

$$(\log.\ a)_{uv} = (\log.\ b)_{uv}.$$

On peut, en choisissant séparément de nouvelles variables u et v, supposer

$$a = b.$$

On a en outre $h_n = k_n$ quel que soit n.

3. Dans l'espace déterminé par les points V, U, U^1, U^2, la première et la seconde quadrique de Tzitzeica ont respectivement pour équations

$$3h_2\eta_0\xi_2 + 2b\xi_0\xi_1 = 0, \quad 6a\eta_0\xi_2 + \xi_0\xi_1 = 0. \tag{2}$$

Dans l'espace déterminé par les points U, U^1, U^2, U^3, ces quadriques ont respectivement pour équations

$$3h_3\xi_0\xi_3 - h_1\xi_1\xi_2 = 0, \qquad 3\xi_0\xi_3 - \xi_1\xi_2 = 0. \tag{3}$$

Enfin, dans l'espace $U^{n-2}U^{n-1}U^nU^{n+1}$, leurs équations sont respectivement

$$3h_{n+1}\xi_{n-2}\xi_{n+1} - h_{n-1}\xi_{n-1}\xi_n = 0, \quad 3\xi_{n-2}\xi_{n+1} - \xi_{n-1}\xi_n = 0. \tag{4}$$

Dans l'espace UVV^1V^2, les quadriques de Tzirzeica sont

$$6b\xi_0\eta_2 + \eta_0\eta_1 = 0, \quad 3k_2\xi_0\eta_2 + 2a\eta_0\eta_1 = 0, \tag{5}$$

dans l'espace $VV^1V^2V^3$,

$$3\eta_0\eta_3 - \eta_1\eta_2 = 0, \quad 3k_3\eta_0\eta_3 - k_1\eta_1\eta_2 = 0,$$

et dans l'espace $V^{n-2}V^{n-1}V^nV^{n+1}$,

$$\eta_{n-1}\eta_n - 3\eta_{n-2}\eta_{n+1} = 0, \quad k_{n-1}\eta_{n-1}\eta_n - 3k_{n+1}\eta_{n-2}\eta_{n+1} = 0.$$

4. Avant d'aller plus loin, observons que si dans les équations (1) on pose

$$U^{n-1} = bh_1 \dots h_{n-1}\bar{U}^{n-1},$$

on a

$$\bar{U}_v^{n-1} = \frac{U^n}{bh_1 \dots h_{n-1}}, \quad U_u^n = bh_1 \dots h_{n-1}h_n\bar{U}^{n-1},$$

de sorte que deux points consécutifs de la suite L peuvent définir cette série de la même manière que les points U et V, ce qui est d'ailleurs évident. Nous aurons besoin plus loin des formules précédentes.

5. Supposons que la droite UU^1 engendre une congruence de Goursat. On doit avoir

$$h_2 = 4ab,$$

c'est-à-dire

$$(\log.\ b^2h_1)_{uv} = 0. \tag{6}$$

Si de plus la droite UV engendre une congruence de Goursat, on a

$$a = b, \ k_2 = h_2 = 4ab, \ (\log\ a^2k_1)_{uv} = 0$$

et la droite VV^1 engendre également une congruence de Goursat.

Cela suffit pour affirmer que si les droites UV et UU^1 engendrent des congruences de Goursat, il en est de même de toute droite de la ligne brisée L. On retrouve ainsi le théorème de Finikoff.

6. Si la droite U^1U^2 engendre une congruence de Goursat, on a

$$h_3 = h_1 \quad \text{ou} \quad (\log.\ b^2h_1^2h_2)_{uv} = 0. \tag{7}$$

La condition (7) n'entraîne pas la condition (6), par conséquent la congruence (U^1U^2) peut être une congruence de Goursat sans qu'il en soit de même de la congruence (UU^1). Cette conclusion subsiste si $a = b$, c'est-à-dire si la congruence (UV) est de Goursat.

Dans ces conditions, la congruence (V^1V^2) est de Goursat.

Considérons la congruence (U^3U^4). On a $h_3 = h_1$, $h_5 = k_1$. Si $a = b$, on a $h_5 = h_3$ et (U^3U^4) est une congruence de Goursat. Alors, (V^3V^4) est une congruence de Goursat et il en est de même (U^5U^6) et ainsi de suite.

D'une manière générale, si les congruences (UV), (U^1U^2) sont de Goursat, il en est de même des congruences $(U^{n-1}U^{n+2})$ et $(V^{n+1}V^{n+2})$.

En d'autres termes, si deux droites d'une ligne brisée de Laplace séparées par une droite engendrent des congruences de Goursat, il en est de même des droites que l'on rencontre de deux en deux à partir des précédentes.

7. Supposons maintenant que la droite $U^{n-1}U^n$ engendre une congruence de Goursat. Les quadriques (4) doivent coïncider et l'on doit avoir

$$h_{n+1} = h_{n-1} \quad \text{ou} \quad (\log.\ b^2h_1^2 \ldots h_{n+1}^2 h_n)_{uv} = 0$$

On en déduit

$$h_{n+2} = h_{n-2},\ h_{n+3} = h_{n-3},\ \ldots,\ h_{n-i} = h_{n-i}.$$

En particulier, nous avons

$$h_{2n-1} = h_1,\ h_{2n+1} = h_{-1} = k_1.$$

Si la congruence (UV) est de Goursat, c'est-à-dire si l'on a $a = b$, $h = k$, alors la congruence $(U^{2n-1}U^{2n})$ est également de Goursat.

On en conclut que la congruence $(U^{3n-1}U^{3n})$ est de Goursat. Il suffit de reprendre le raisonnement précédent en remplaçant U^{n-1} par $\bar{U}^{n-1}$ comme il a été indiqué plus haut (n° 4). Et ainsi de suite.

Plus généralement, on peut écrire que si les droites $U^{m-1}U^m$ et $U^{m+n-1}U^{m+n}$ engendrent des congruences de Goursat, il en est de même de la droite $U^{m+kn-1}U^{m+kn}$. Lorsque les nombres $m + kn - 1$, $m + kn$ sont négatifs, les U doivent être remplacés par des V en remarquant que $U^{-p} = V^{p-1}$.

Liège, le 8 février 1966.