Bulletin de la Classe des sciences

Remarques sur les variétés de Segre et de Veronese

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination du nombre d'hyperquadriques linéairement indépendantes contenant une variété de Segre ou une variété de Veronese.
Les équations d'une variété de Segre ou d'une variété de Veronese s'obtiennent en écrivant qu'un certain déterminant est de caractéristique un. Ces équations représentent des hyperquadriques passant par la variété. Le but de cette note est de déterminer le nombre de ces hyperquadriques qui sont linéairement indépendantes.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarques sur les variétés de Segre et de Veronese

par Lucien GODEAUX
Membre de l'Académie

Résumé. — Détermination du nombre d'hyperquadriques linéairement indépendantes contenant une variété de Segre ou une variété de Veronese.

Les équations d'une variété de Segre ou d'une variété de Veronese s'obtiennent en écrivant qu'un certain déterminant est de caractéristique un. Ces équations représentent des hyperquadriques passant par la variété. Le but de cette note est de déterminer le nombre de ces hyperquadriques qui sont linéairement indépendantes.

1. Considérons le déterminant

$$|\,X_{ik}\,| \qquad\qquad (i, k = 0, 1, \ldots, n)$$

et supposons qu'il soit de caractéristique un, c'est-à-dire que les déterminants à quatre éléments obtenus en supprimant $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes soient nuls. Nous appellerons ces déterminants les déterminants Δ.

Il existe alors deux suites de nombres $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et $z_0, z_1, \ldots, z_n$ tels que l'on ait $X_{ik} = y_i z_k$. Interprétons $y_0, y_1, \ldots, y_n$ comme coordonnées des points d'un espace (y) à n dimensions et $z_0, z_1, \ldots, z_n$ comme celles des points d'un espace (z) à n dimensions également.

Nous considérerons deux cas suivant que le déterminant $|\,X_{ik}\,|$ n'est pas symétrique ou est symétrique.

Les déterminants Δ sont au nombre de $\binom{n+1}{2}^2$ et nous verrons que dans le second cas, ils sont liés par certaines relations.

2. Plaçons-nous dans le premier cas.

Interprétons les X_{ik} comme coordonnées d'un point d'un espace Σ à $n(n+2)$ dimensions. En exprimant que le déterminant $|X_{ik}|$ est de caractéristique un, on obtient les équations de la variété de Segre V_{2n} représentant les couples de points des espaces (y) et (z).

En égalant à zéro les déterminants Δ, on obtient $\binom{n+1}{2}^2$ hyperquadriques passant par la variété V_{2n}. Nous allons voir qu'elles sont linéairement indépendantes.

Les hyperquadriques de Σ linéairement indépendantes sont au nombre de

$$\binom{n^2+2n+2}{2} = \frac{1}{2}(n+1)^2(n^2+2n+2).$$

A une hyperquadrique de Σ ne contenant pas V_{2n} correspond une relation entre les points y, z telle qu'à un point de l'un des espaces (y), (z) correspondent les points d'une hyperquadrique de l'autre. Ces relations sont au nombre de

$$\binom{n+2}{2}^2 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$$

et ce nombre est celui des hyperquadriques de Σ ne contenant pas V_{2n}.

Le nombre des hyperquadriques de Σ contenant V_{2n} est donc

$$\frac{1}{2}(n+1)^2(n^2+2n+2) - \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$$
$$= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 = \binom{n+1}{2}^2.$$

Ce nombre est précisément celui des déterminants Δ, donc :

Par la variété de Segre représentant les couples de points de deux espaces à n *dimensions dans un espace à* $n(n+2)$ *dimensions, passent* $\binom{n+1}{2}^2$ *hyperquadriques linéairement indépendantes.*

3. Plaçons-nous maintenant dans le second cas. Le déterminant $|X_{ik}|$ étant symétrique, on a $X_{ik} = X_{ki}$, c'est-à-dire $y_i z_k = y_k z_i$. On peut donc prendre $y_i = z_i$.

Interprétons les X_{ik} comme coordonnées des points d'un espace Σ' à $\binom{n+1}{2} - 1$ dimensions. En exprimant que $|X_{ik}|$ est de caractéristique un, on obtient les équations d'une variété V_n à n dimensions.

A une section hyperplane de V_n correspond dans l'espace (y) l'équation d'une hyperquadrique. La variété V_n est donc la variété de Veronese représentant les hyperquadriques d'un espace à n dimensions.

En égalant à zéro les déterminants $\varDelta$, on obtient

$$\frac{1}{2}\left[\binom{n+1}{2}^2 + \binom{n+1}{2}\right] = \frac{1}{8}\, n(n+1)(n^2+n+2)$$

hyperquadriques passant par la variété V_n.

Les hyperquadriques linéairement indépendantes de Σ' sont au nombre de

$$\frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4).$$

A une hyperquadrique de Σ' ne passant pas par V_n correspond dans l'espace (y) une hypersurface du quatrième ordre. Le nombre de ces hypersurfaces linéairement indépendantes est

$$\binom{n+4}{4} = \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).$$

Le nombre des hyperquadriques contenant V_n est donc

$$\frac{1}{8}(n+1)(n+2)(n^2+3n+4) - \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$
$$= \frac{1}{12}\, n(n-1)^2(n+2).$$

Il en résulte que parmi les hyperquadriques données par l'annulation des $\varDelta$, il y en a

$$\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n+2) - \frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$$
$$= \frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)$$

qui dépendent linéairement des autres.

Par la variété de Veronese représentant les hyperquadriques d'un espace à n dimensions dans un espace à $\frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions, passent $\frac{1}{12}n(n+1)^2(n+2)$ hyperquadriques linéairement indépendantes. Il en existe $\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)$ qui sont combinaisons linéaires des précédentes.

4. Voici quelques applications des théorèmes précédents.

Considérons tout d'abord la variété de Segre correspondant à $n = 3$. La section de cette variété V_6, d'ordre 20, dans un espace S_{15} à 15 dimensions par un espace S_{11} à 11 dimensions est une surface F d'ordre 20 à sections hyperplanes de genre 11 (1). Elle possède une courbe canonique d'ordre zéro. Les hyperquadriques découpent sur cette surface un système de dimension 41.

Le nombre des hyperquadriques linéairement indépendantes d'un espace S_{11} est 78. Celui des hyperquadriques linéairement indépendantes passant par V_6 est 36. Il y a donc $78 - 36 = 42$ hyperquadriques linéairement indépendantes ne passant pas par F et déterminant sur cette surface le système double des sections hyperplanes, de dimension 41.

5. Considérons maintenant la variété de Veronese V_3 d'ordre huit de S_9 donnée par $n = 3$. La surface F, d'ordre 16, section de cette variété par une hyperquadrique correspond à une surface du quatrième ordre de l'espace (y) et possède donc une courbe canonique d'ordre zéro. Le double des sections hyperplanes est par conséquent un système de genre et dimension 33.

(1) Voir notre note sur les *Systèmes canoniques de sections d'une variété de Segre* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1967, pp. 1120-1124).

Les hyperquadriques linéairement indépendantes de S_9 sont au nombre de 55. Il y en a 20 passant par V_3 et une qui détermine F sur V_3. Il y a donc $55 - 21 = 34$ hyperquadriques linéairement indépendantes ne contenant pas F et découpant sur cette surface des courbes du système de dimension 33.

Supposons $n = 5$. La variété de Veronese correspondante est d'ordre 32, appartient à un espace S_{20} à 20 dimensions et par cette variété passent 105 hyperquadriques linéairement indépendantes. La section de cette variété par un espace à 17 dimensions est une surface F de genres $p_a = P_4 = 1$. Les sections hyperplanes de F sont de genre 17 et ses sections par des hyperquadriques sont de genre 65. Elles forment donc un système de dimension 65. Le nombre des hyperquadriques linéairement indépendantes de S_{17} est $171 = 66 + 105$, ce qui est donc vérifié.

Liège, le 11 novembre 1967.