Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre supérieur à deux

Lucien Godeaux

Résumé
On démontre que si une surface algébrique contient une involution cyclique d'ordre p privée de points unis dont l'image est une surface de genres $p\alpha = pg = o$, $P2 > 2$, p est une puissance de deux.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces algébriques de genres zéro et de bigenre supérieur à deux

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On démontre que si une surface algébrique contient une involution cyclique d'ordre p privée de points unis dont l'image est une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$, p est une puissance de deux.

Dans nos recherches sur la construction des surfaces algébriques F de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$, nous avons établi les théorémes suivants :

I. La surface F peut être l'image d'une involution cyclique d'ordre $p_a + 1$, dépourvue de points unis, appartenant à une surface algébrique régulière de genres $p_a = p_g$.

II. La surface F possède une courbe isolée Γ, non canonique. Le système bicanonique est le système $|2\Gamma|$, distinct du système adjoint $|\Gamma'|$ à Γ.

Une surface obtenue par le premier mode de construction doit donc contenir une courbe isolée Γ. Nous allons montrer que la chose est impossible si l'ordre de l'involution n'est pas une puissance de deux. Précisément, nous établissons le théorème suivant :

Une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$ *ne peut être l'image d'une involution cyclique privée de points unis appartenant à une surface algébrique que si l'ordre de l'involution est une puissance de deux.*

Dans une note récente [1], nous avons déjà établi ce théorème lorsque l'ordre de l'involution est $p = 7$ et indiqué que notre démonstration peut s'étendre aux cas où p est impair. La démonstration que nous donnons ici est beaucoup plus simple.

Pour la construction des surfaces par le procédé n° 1, nous renvoyons à une note antérieure [2].

Rappelons que la construction n° 1 donne, pour $p = 5$, la surface la plus générale de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 2$ [3].

1. Considérons une surface algébrique F, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)} > 2$, à courbes bicanoniques irréductibles. Cette surface peut être l'image d'une involution cyclique I, d'ordre p, privée de points unis, appartenant à une surface régulière $\overline{F}$, de genres $p_a = p_g = p - 1$.

Si nous prenons comme modèle projectif de $\overline{F}$ une surface de l'espace S_{p-2}, à $p - 2$ dimensions, dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques, l'involution I est engendrée par une homographie cyclique T n'ayant pour points unis que les $p - 1$ sommets de la figure de référence. Les équations de cette homographie peuvent s'écrire

$$\rho x'_i = \epsilon^i x_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, p - 1)$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Il existe, sur la surface $\overline{F}$, $p - 1$ courbes canoniques appartenant à l'involution I. Ce sont les sections de F par les faces de la figure de référence, c'est-à-dire par les hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_{p-1} = 0$. Nous les désignerons par $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, ..., $\overline{K}_{p-1}$ et les courbes qui leur correspondent sur F seront dénotées

(1) *Observation sur les surfaces non rationnelles de genres zéro* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, séance du 6 mai 1967).

(2) *Sur les surfaces algébriques de genres nuls à courbes bicanoniques irréductibles* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1958, pp. 1-14).

Pour la construction n° 2, voir nos *Recherches sur les surfaces non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1965, pp. 25-31).

(3) *Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1958, pp. 738-748, 942-944).

par $K_1, K_2, \ldots, K_{p-1}$. A ces courbes sont attachés les nombres $\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^{p-1}$.

Nous distinguerons deux cas suivant que p est pair ou impair.

2. Supposons en premier lieu p impair et posons $p = 2\nu + 1$.

Nous avons établi, dans notre note citée plus haut, que le genre linéaire de la surface F est $p^{(1)} = \nu$ et que les hyperquadriques de $S_{\nu-2}$ découpent sur la surface $\overline{F}$ le système bicanonique complet. La surface $\overline{F}$ n'appartient donc à aucune hyperquadrique. De plus, le genre linéaire de F est $p^{(1)} = p(\nu - 1) + 1$ et elle a l'ordre $p(\nu - 1)$.

Sur la surface F, le système bicanonique $|H|$ contient les courbes

$$K_1 + K_{2\nu}, K_2 + K_{2\nu-1}, \ldots, K_\nu + K_{\nu+1}.$$

Le système $|K'_1|$ adjoint à la courbe K_1 contient des courbes formées de deux courbes K, mais l'une de ces courbes ne peut être K_1 puisque le système $|K'_1 - K_1|$ n'existe pas. Il contient les courbes $K_2 + K_{2\nu}$, $2K_{\nu+1}, \ldots$ Le système $|K'_2|$, adjoint à K_2, contient la courbe $2K_1$. On a

$$|H'| = |K'_1 + K_{2\nu}| = |K_2 + 2K_{2\nu}|,$$

$$|H''| = |2K_1 + 2K_\nu| = |2H|, \; |H'' - H| = |H|,$$

ce qui montre bien que H est le système bicanonique de F.

La surface F contient p systèmes linéaires de degré $4(\nu - 1)$, de genre $3(\nu - 1) + 1$ et de dimension $\nu - 1$. Ce sont le système bicanonique $|H|$ et les systèmes $|K'_1|, |K'_2|, \ldots, |K'_{2\nu}|$. Le système $|K'_i|$ ne peut contenir une courbe dont K_i fait partie.

A ces systèmes correspondent sur $\overline{F}$ des systèmes linéaires $|\overline{H}|, |\overline{K}'_1|, |\overline{K}'_2|, \ldots, |\overline{K}'_{2\nu}|$ appartenant à l'involution et faisant partie du système bicanonique.

Le système $|H|$ est découpé par les hyperquadriques

$$\lambda_1 x_1 x_{2\nu} + \lambda_2 x_2 x_{2\nu-1} + \ldots + \lambda_\nu x_\nu x_{\nu+1} = 0,$$

c'est-à-dire par des hyperquadriques passant par les sommets de la figure de référence. Le système $|K'_1|$ est découpé par les cônes du second ordre de sommet $O_1(1, 0, \ldots, 0)$. Les systèmes

$|K_2'|$, $|K_3'|, \ldots, |K_{2\nu}'|$ sont également découpés par des cônes quadratiques ayant pour sommets les sommets de la figure de référence.

3. D'après le second théorème, la surface F doit contenir une courbe Γ de genre ν et de degré virtuel $\nu - 1$, isolée, telle que $|2\Gamma|$ soit le système bicanonique de F, sans que Γ soit une courbe canonique. Le système $|\Gamma'|$ adjoint à Γ est distinct de $|2\Gamma|$. Ces deux systèmes ont le genre $3(\nu - 1) + 1$, le degré $4(\nu - 1)$ et la dimension $\nu - 1$.

Nous devons avoir

$$|2\Gamma| = |K_1 + K_{2\nu}|$$

et la courbe Γ rencontre chacune des courbes K_1, $K_{2\nu}$ en $\nu - 1$ points.

A la courbe Γ correspond sur $\overline{F}$ une courbe $\overline{\Gamma}$ d'ordre $p(\nu - 1)$, de genre $p(\nu - 1) + 1$, qui ne peut être une section hyperplane. Mais la courbe $2\overline{\Gamma}$ appartient au système $|\overline{H}|$ et il existe donc une hyperquadrique touchant $\overline{F}$ le long de la courbe $\overline{\Gamma}$. Cette hyperquadrique appartient au système découpant $|\overline{H}|$ sur $\overline{F}$.

Au système $|\Gamma'|$ correspond sur $\overline{F}$ un système $|\overline{\Gamma}'|$ découpant sur $\overline{\Gamma}$ la série canonique. Observons que les courbes $\overline{H}$ découpent sur $\overline{\Gamma}$ une série paracanonique, par conséquent le système $|\overline{\Gamma}'|$ doit coïncider avec un des systèmes $|\overline{K}_1'|$, $|\overline{K}_2'|$, $\ldots$, $|\overline{K}_{2\nu}'|$.

Supposons que $|\overline{\Gamma}'|$ et $|\overline{K}_1'|$ coïncident. Il en résulte que les systèmes $|\Gamma'|$ et $|K_1'|$ coïncident sur F. Mais alors, les courbes Γ et K_1 coïncident. Comme 2Γ et $K_1 + K_{2\nu}$ appartiennent au même système linéaire, K_1 et $K_{2\nu}$ doivent coïncider, ce qui est absurde. Il en résulte que si p est impair, la surface $\overline{F}$ ne peut exister.

4. Supposons maintenant p pair et posons tout d'abord $p = 2^{\alpha}q$, q étant un nombre impair supérieur à cinq.

Soit T la transformation birationnelle de la surface F en soi génératrice de l'involution I. La transformation T^q engendre sur F une involution d'ordre 2^{α} privée de points unis. Soit F' une surface image de cette involution. Entre le genre arithmétique $p_a = 2^\alpha q - 1$ de F et celui p'_a de F' on a la relation

$$p_a + 1 = 2^\alpha(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = q - 1$.

A l'involution I correspond sur F' une involution cyclique d'ordre q privée de points unis, dont l'image doit être une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 \geq 2$. Nous avons vu que cela était impossible. On en déduit que p doit être une puissance de deux.

5. Posons $p = 2^\alpha$ et, pour simplifier l'écriture, $p = 2\nu$, $\nu = 2^{\alpha-1}$.

La surface F contient $2\nu - 1$ courbes isolées $K_1, K_2, \ldots, K_{2\nu-1}$ de genre $\nu + 1$ et de degré virtuel $\nu - 2$, linéairement indépendantes.

Le système bicanonique $|H|$ contient les courbes

$$K_1 + K_{2\nu-1},\ K_2 + K_{2\nu-2},\ \ldots,\ K_{\nu-1} + K_{\nu+1},\ 2K_\nu.$$

D'autre part, on a

$$|K'_\nu| = |K_1 + K_{\nu-1}| = |K_2 + K_{\nu-2}| = \ldots = |K_{\nu+1} + K_{2\nu-1}|$$

On en déduit

$$2K'_\nu = K_1 + K_{\nu-1} + K_{\nu+1} + K_{2\nu-1} = 2H = 4K_\nu$$

On doit donc prendre $\Gamma = K_\nu$, $\Gamma' = K'_\nu$.

Observons d'ailleurs que l'opération T^2 engendre sur F une involution d'ordre $\nu = 2^\alpha$ privée de points unis. La surface F' image de cette involution a le genre arithmétique $p'_a = 1$ et est régulière. A l'involution I correspond sur F' une involution du second ordre privée de points unis. Cette surface possède une courbe canonique isolée et l'involution du second ordre est représentée par la surface F. A la courbe canonique de F' correspond sur F la courbe Γ. Ainsi se trouve établie la liaison entre les constructions I et II pour $p = 2^\alpha$.

Liège, le 9 mai 1967.
