Bulletin de la Classe des sciences

Sur une configuration formée par des congruences de droites

Lucien Godeaux

Résumé
Étude géométrique de la configuration formée par deux congruences de droites appelée Configuration T par Finikoff. Configurations T associées à la première.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur une configuration formée par des congruences de droites

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude géométrique de la configuration formée par deux congruences de droites appelée *Configuration T* par Finikoff. Configurations T associées à la première.

Considérons deux congruences de droites (g) et (h), appelons A^1, A^2 les foyers d'une droite g et B^1, B^2 ceux d'une droite h. Supposons qu'il existe entre ces congruences une correspondance continue biunivoque. Si les plans focaux d'une droite g passent par les foyers de la droite h homologue et si les plans focaux de la droite h passent par les foyers de la droite g d'une manière qui sera précisée plus loin, les congruences forment ce que Finikoff a appelé une *configuration T* (1).

Si G et H sont les points de l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 représentant les droites de (g) et de (h), les plans tangents en deux points homologues aux surfaces (G) et (H) se coupent suivant une droite n'appartenant pas à l'hyperquadrique Q.

(1) S.P. FINIKOW, *Theorie der Kongruenzen*, traduit par G. BOL (Berlin, 1959). Voir p. 275 et suiv. Voir aussi M. DECUYPER, *Sur quelques transformations des congruences de droites* (Deuxième Colloque de Géométrie différentielle du Centre belge de Recherches mathématiques, Paris et Louvain, 1962) où l'on trouvera la bibliographie de la question.

Réciproquement, si cette propriété est vérifiée et si la droite GH n'appartient pas à Q, les congruences (g), (h) forment une configuration T.

Un premier exemple de configuration T est donné par les arêtes opposées des quadrilatères de Demoulin attachés aux points d'une surface. Un second exemple plus général a été donné par Finikoff dans l'ouvrage cité. Nous y reviendrons plus loin.

Notre but dans cette note est d'étudier par voie géométrique les congruences présentant la configuration T et de démontrer un théorème obtenu par voie analytique par M. B. A. Rosenfeld (²), à savoir qu'il existe sur la droite GH deux points transformés de Laplace l'un de l'autre.

Chemin faisant, nous obtenons de nouvelles propriétés de la configuration étudiée.

1. Soient (g) et (h) deux congruences de droites liées par une correspondance biunivoque et continue, les développables des congruences n'étant pas nécessairement homologues dans cette correspondance. Désignons par

A^1, A^2 les foyers d'une droite de (g), par α^1, α^2 les plans tangents en A^1, A^2 aux surfaces (A^1), (A^2).

B^1, B^2 les foyers d'une droite de (h), par β_1, β_2 les plans tangents en B^1, B^2 aux surfaces (B^1), (B^2).

Nous dirons avec Finikoff que les congruences (g), (h) présentent la configuration T si, g et h étant deux droites homologues,

1° Le plan α_1 passe par B^2 et le plan α_2 par B^1.

2° Le plan β_1 passe par A^2 et le plan β_2 par A^1.

Les plans α_2, β_2 passent par la droite A^1B^1 que nous désignerons par g_1 et les plans α_1, β_1 par la droite A^2B^2 que nous désignerons par g_2.

Désignons par h_1 la droite A^1B^2 et par h_2 la droite A^2B^1. La droite h_1 est tangente en A^1 à la surface (A^1) et en B^2 à la surface (B^2). Les nappes focales de la congruence (h_1) sont donc les surfaces (A^1), (B^2) et les plans focaux α_1 et β_2.

(²) B.A. ROSENFELD, *Die metrische Methode in der projektive Differentialgeometrie und ihren konformen und berührunge geometrischen Analogien* (en russe), (Mathem. Sammelbd., 1948, pp. 457-492). Voir aussi le mémoire de M. DECUYPER cité plus haut.

La congruence (h_2) a comme nappes focales (A^2) et (B^1) et comme plans focaux α_2, β_1.

Le plan α_1 passe par A^2 et le plan β_2 par B^1. Le plan α_2 passe par A^1 et le plan β_1 par B^2, donc les congruences (h_1), (h_2) présentent également la configuration T.

2. Désignons par G, H les points de l'hyperquadrique Q de Klein qui représentent les droites g et h.

Par G passent quatre droites appartenant à Q et représentant respectivement les faisceaux de rayons (A^1, α_1), (A^2, α_2), (A^1, α_2), (A^2, α_1), les deux dernières droites étant les tangentes aux courbes de la surface (G) représentant les développables de la congruence (g).

De même par H passent quatre droites appartenant à Q et représentant respectivement les faisceaux de rayons (B^1, β_1), (B^2, β_2), (B^1, β_2), (B^2, β_1), les deux dernières droites tangentes aux courbes représentant sur (H) les développables de la congruence (h).

Supposons les droites g, h et par suite les points G, H homologues.

Les faisceaux de rayons (A^1, α_2), (B^1, β_2) ont en commun la droite g_1 dont le correspondant sur Q sera désigné par G^1. Les faisceaux (A^2, α_1) et (B^2, β_1) ont en commun la droite g_2 dont le point représentatif sur Q sera désigné par G^2.

On voit donc que le plan tangent à la surface (G) et le plan tangent à la surface (H) en deux points homologues se coupent suivant la droite G^1G^2. De plus, aux développables de la congruence (g) correspondent sur (G) les courbes ayant pour tangentes GG^1, GG^2 et aux développables de la congruence (h) correspondent sur (H) les courbes ayant comme tangentes HG^1, HG^2. Si u, v sont les paramètres des congruences (g), (h) fixant les droites homologues, il est bien clair que les développables des congruences sont fixées par des fonctions de u, v qui peuvent être différentes pour chacune des congruences.

Soient H^1, H^2 les points de Q qui représentent les droites h_1, h_2.

Par le point H^1 passent quatre droites de Q représentant les faisceaux de rayons (A^1, α_1), (B^2, β_2), (A^1, β_2), (B^2, α_1) et par H^2 les droites représentant les faisceaux de rayons (A^2, α_2), (B^1, β_1),

(A^2, β_1), (B^1, α_2). Dans chaque cas, les deux dernières droites sont les tangentes aux courbes de (H^1), (H^2) représentant les développables des congruences correspondantes.

Les faisceaux (A^1, β_2), (B^1, α_2) contiennent la droite g_1, donc les droites qui les représentent sur Q passent par le point G^1. De même, les droites qui représentent les faisceaux de rayons (B^2, α_1), (A^2, β_1) passent par le point G^2.

La droite GH^1 représente le faisceau (A^1, α_1). De même, les droites GH^2, HH^1, HH^2 représentent respectivement les faisceaux (A^2, α_2), (B^2, β_2), (B^1, β_1).

3. Observons que l'hyperplan polaire de G par rapport à Q contient les droites issues de ce point et appartenant à Q, il contient donc les points G^1, G^2, H^1, H^2. L'hyperplan polaire de H contient les mêmes points, donc la droite GH et l'espace à trois dimensions $G^1G^2H^1H^2$ sont conjugués par rapport à Q.

De même, la droite H^1H^2 et l'espace GHG^1G^2 sont conjugués par rapport à Q et il en est de même de la droite G^1G^2 et de l'espace GHH^1H^2.

4. Le plan tangent en G^1 à la surface (G^1) appartient à l'hyperplan polaire de G^1 par rapport à Q et rencontre donc suivant une droite a l'espace à trois dimensions GHH^1H^2.

Par le point A^1 passent les droites g, g_1, h_1 donc le plan de Q qui représente la gerbe de sommet A^1 contient les points G, G^1, H^1 et par suite les droites G^1G, G^1H^1. De même le plan qui représente sur Q la gerbe de sommet B^1 contient les points H, G^1, H^2 et par suite les droites G^1H, G^1H^2.

La droite a doit rencontrer en un point chacun des plans GH^1H^2, HH^1H^2, GHH^1, GHH^2 (qui n'appartiennent pas à Q). Si ces points de rencontre sont distincts, l'espace à trois dimensions conjugué de a par rapport à Q doit contenir les plans conjugués des plans précédents, c'est-à-dire les plans GG^1G^2, HG^1G^2, $G^1G^2H^1$, $G^1G^2H^2$, de sorte que les points considérés appartiendraient à un espace à trois dimensions, ce qui est absurde.

On voit donc que la droite a doit s'appuyer sur les droites GH^1, GH^2, HH^1, HH^2 et d'une manière précise sur deux de ces droites. Ces deux droites doivent appartenir aux plans de Q passant par G^1 et la droite *a* s'appuie donc sur les droites GH^1, HH^2 en des points que nous désignerons par M^1, M^2. Les tangentes à la surface (G^1) appartenant à Q sont donc les droites G^1M^1, G^1M^2.

On démontre de même que le plan tangent en G^2 à la surface (G^2) rencontre les droites GH^2, HH^1 en des points N^1, N^2. Les droites G^2N^1, G^2N^2 touchent en G^2 les courbes représentant les développables de la congruence (g_2).

5. Soient (X), (Y) deux surfaces tracées sur Q en correspondance biunivoque et telles que les plans tangents en deux points homologues se coupent suivant une droite r n'appartenant pas à Q. La droite r coupe Q en deux points Z^1, Z^2 et les droites projetant ces points de X, Y appartiennent à Q. Les droites XZ^1, XZ^2 sont tangentes aux courbes de la surface (X) représentant les développables de la congruence (x) dont (X) est l'image. Les droites YZ^1, YZ^2 jouent un rôle analogue vis-à-vis de la surface (Y).

Supposons en premier lieu que la droite XY n'appartienne pas à Q. Soient dans un espace à trois dimensions, X^1, X^2, Y^1, Y^2 les sommets des faisceaux de rayons représentés par les droites XZ^1, XZ^2, YZ^1, YZ^2 respectivement. Aux points X, Y correspondent les droites $x = X^1X^2$, $y = Y^1Y^2$ et aux points Z^1, Z^2 les droites X^1Y^1, X^2Y^2. Les plans focaux de la congruence (x) sont les plans $X^1X^2Y^1$, $X^1X^2Y^2$ et ceux de la congruence (y), $Y^1Y^2X^1$, $Y^1Y^2X^2$. On voit que les congruences (x), (y) présentent la configuration T.

Supposons maintenant que la droite XY appartienne à Q. Alors, chacun des plans XYZ^1, XYZ^2 rencontre Q suivant trois droites et appartiennent à l'hyperquadrique. La droite XY représente un faisceau de rayons (P, ϖ), l'un des plans précédents représentant la gerbe de sommet P et l'autre le plan réglé ϖ. Les droites x, y passent par P et y ont comme plan focal ϖ. Les congruences (x), (y) ont une surface focale en commun.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux congruences de droites (g), (h) *présentent la configuration* T *est que si* G, H *sont deux points homologues des surfaces* (G), (H) *qui représentenl les congruences sur l'hyperquadrique* Q *de Klein, la droitte* GH *n'appar-*

tienne pas à Q *et que les plans tangents en* G, H *aux surfaces se rencontrent suivant une droite n'appartenant pas à* Q.

6. Considérons les points M^1, M^2. Si la droite M^1M^2 appartenait à Q, l'espace GHH^1H^2 au lieu de rencontrer Q suivant une quadrique appartiendrait totalement à Q et la droite GH appartiendrait à l'hyperquadrique, ce qui est impossible car les droites g, h sont gauches. D'ailleurs Q ne peut contenir un espace à trois dimensions. La droite M^1M^2 ne peut donc appartenir à Q.

D'autre part, le plan tangent en M^1 à la surface (M^1) passe par G^1G^2, de même que le plan tangent à la surface (M^2). Si m_1, m_2 sont les droites représentées sur Q par les points M^1, M^2, les congruences (m_1), (m_2) présentent la configuration T.

Si n_1, n_2 sont les droites représentées sur Q par les points N^1, N^2, les congruences (n_1), (n_2) présentent également la configuration T.

7. Entre les surfaces (G) et (H) nous avons une correspondance biunivoque. Si G, H sont deux points homologues, les tangentes aux courbes qui sur (G) et (H) représentent les développables se rencontrent en deux points G^1, G^2, la droite G^1G^2 n'appartenant pas à Q et rencontrant cette hyperquadrique en G^1, G^2.

Prenons un point P de la droite G^1G^2 et par ce point menons la tangente à la surface (G). A cette tangente correspond une tangente à la surface (H). Prenons la conjuguée harmonique de celle-ci par rapport aux droites HG^1, HG^2. A cette droite correspond une tangente à la surface (G) rencontrant la droite G^1G^2 en un point P'. La correspondance entre les points P, P' est algébrique et involutive. Deux cas peuvent se présenter :

1) Les points P et P' sont conjugués harmonique par rapport à G^1, G^2 quel que soit P.

2) Il n'existe qu'un couple PP' conjugué harmonique par rapport à G^1G^2.

Plaçons-nous en premier lieu dans le second cas.

En procédant de proche en proche, on voit qu'il existe sur la surface (G) deux familles de courbes γ_1, γ_1' telles que par un point G passe une courbe de chaque famille, les tangentes à ces courbes en ce point partageant harmoniquement le couple GG^1, GG^2. De même, il existe sur (H) deux familles de courbes γ_2, γ'_2 possédant la propriété analogue. Dans la correspondance entre les surfaces (G), (H), aux courbes γ_1, γ'_1 correspondent respectivement les courbes γ_2, γ'_2. On peut, en changeant les paramètres des droites des congruences (g), (h), supposer que les courbes γ_1, γ_2 sont données par $v = C^{te}$ et les courbes γ'_1, γ'_2 par $u = C^{te}$.

Cette substitution étant faite, lorsque u varie, le plan tangent le long de la droite GH coïncide avec le plan GHP et est fixe. La droite GH décrit donc une développable. Soit U le point où la droite GH touche l'arête de rebroussement de cette développable.

Lorsque v varie, le plan tangent le long de la droite GH est le plan GHP' et cette droite décrit une développable. Soit V le point où la droite GH touche l'arête de rebroussement de cette développable.

Les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

8. Plaçons-nous dans le second cas. Dans la correspondance entre les surfaces (G) et (H), les droites GG^1 et HG^1 d'une part, les droites GG^2 et HG^2 d'autre part, se correspondent. On voit donc que dans la correspondance entre les congruences (g), (h), les développables se correspondent et on peut choisir les variables de telle sorte que ces développables soient données par $u = C^{te}$ et $v = C^{te}$.

Cela étant, lorsque u varie, le plan tangent le long de la droite GH est le plan GHG^1 et lorsque v varie, c'est le plan GHG^2. Dans chaque cas, la droite GH engendre une développable et si nous désignons par U, V les points où la droite touche les arêtes de rebroussement de ces développables, les points U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre.

Le théorème de M.B.A. Rosenfeld est démontré.

Les points G, H *représentent que* Q *les droites* g, h *de deux congruences présentant la configuration* T *sont situés sur une droite joignant deux points transformés de Laplace l'un de l'autre.*

Il en est de même des couples de points H^1 et H^2, M^1 et M^2, N^1 et N^2.

9. Considérons dans un espace S_5 quatre points consécutifs X, X^1, X^2, X^3 d'une suite de Laplace, les variables étant u, v et chacun des points considérés étant le transformé du précédent dans le sens des u.

Désignons par C^1, C^2 les points de rencontre de la droite X^1X^2 avec l'hyperquadrique Q.

Les tangentes aux courbes u des surfaces (C^1), (C^2) aux points C^1, C^2 sont situées dans le plan $X^1X^2X^3$ et se coupent en un point A. Les tangentes aux courbes v sont situées dans le plan XX^1X^2 et se coupent en un point B.

La droite AB n'appartient pas à Q et coupe cette hyperquadrique en deux point A^1, B^1. Les droites C^1A^1, C^1B^1, C^2A^1, C^2B^1 sont tangentes aux courbes qui représentent sur (C^1), (C^2) les développables des congruences (c^1), (c^2) dont (C^1), (C^2) sont les images.

Les congruences (c^1), (c^2) *présentent la configuration* T.

Dans l'ouvrage cité, Finikoff considérait deux suites de Laplace de S_5,

$$\ldots, X^{-n}, \ldots, X^{-1}, X, X^1, \ldots, X^n, \ldots,$$

$$\ldots, Y^{-n}, \ldots, Y^{-1}, Y, Y^1, \ldots, Y^n, \ldots$$

telles que X^n soit le pôle de $Y^{n-2}Y^{n-1}Y^nY^{n+1}Y^{n+2}$ et Y^n celui de $X^{n-2}X^{n-1}X^nX^{n+1}X^{n+2}$ par rapport à Q. Observons qu'il suffit de se donner la première suite, la seconde étant déterminée par le point Y pôle de $X^{-2}X^{-1}XX^1X^2$. Notons aussi que si les variables sont u, v et si dans la première suite chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u, dans la seconde suite, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v.

Si D^1, D^2 sont les points d'intersection de Y^1Y^2 avec Q, les tangentes aux courbes u aux surfaces (D^1), (D^2) se coupent en un point A' et les tangentes aux courbes v en un point B'. Les points A, B, A', B' sont situés sur une même droite conjuguée à l'espace $X^1X^2Y^1Y^2$ par rapport à Q. Les droites d^1, d^2 représentées par D^1, D^2 engendrent des congruences présentant la configuration T.

Comme Finikoff le fait d'ailleurs, les mêmes conclusions s'appliquent aux intersections des droites X^nX^{n+1} et Y^nY^{n+1} avec Q.

Si les suites considérées se confondent avec la suite

$$\ldots, U^n, \ldots, U^1, U, V, V^1, \ldots, V^n, \ldots$$

associée à une surface, le résultat précédent s'étend sans peine (1).

Liége, 21 décembre 1966.

(1) Dans notre mémoire sur *La Géométrie différentielle des surfaces considérées dans l'espace réglé* (Mémoires in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1964), nous avons démontré que si C^1, C^2 sont les points d'intersection de la droite V^nV^{n+1} avec Q et D^1, D^2 ceux de la droite U^nU^{n+1}, les tangentes aux courbes u aux surfaces (C^1), (C^2) se coupent en un point A, les tangentes aux courbes v en un point B, les tangentes aux courbes u aux surfaces (D^1), (D^2) en un point A′, les tangentes aux courbes v en un point B′, ces quatre points se trouvant sur la droite conjuguée de l'espace $U^nU^{n+1}V^nV^{n+1}$ par rapport à Q. Nous ne nous sommes pas occupé en cet endroit de la configuration T présentée par les congruences correspondantes, notre but étant différent.